

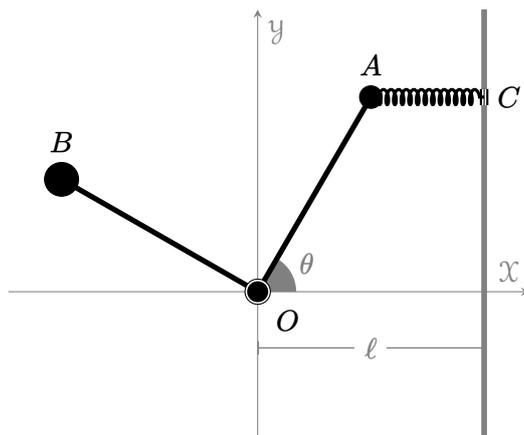
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

13 Gennaio 2025

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. Il voto minimo per l'accesso all'orale è 15/30.

In un piano verticale sono date due aste di massa trascurabile identificate dai segmenti ortogonali \overline{OA} e \overline{OB} rispettivamente, ciascuno di lunghezza ℓ : come visibile in figura, esse sono saldate tramite un giunto rigido “ad L” in O , di modo che durante il loro moto sia sempre $\overline{OA} \perp \overline{OB}$. Il giunto è imperniato nell'origine di un riferimento cartesiano tramite una cerniera che permette al sistema di aste di ruotare liberamente attorno ad esso mantenendosi nel piano verticale. L'estremo A di una delle due aste è inoltre collegato, tramite una molla ideale di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k , ad un carrello C che scorre su una guida verticale e a distanza ℓ da O , di modo che \overline{AC} rimanga sempre orizzontale. In A , B ed O sono collocate delle masse puntiformi, pari a m , $2m$ ed m rispettivamente.



- A** Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse ortogonale al piano in cui esso giace e passante per il suo centro di massa.

Suggerimento. Una possibile maniera di procedere è calcolare inizialmente il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O e quindi utilizzare il teorema di Huygens–Steiner.

- B** Detto g il modulo dell'accelerazione di gravità, si assuma la seguente relazione:

$$k\ell = 2mg.$$

Sotto questa ipotesi, si mostri che il sistema è associabile ad un potenziale in una variabile lagrangiana θ , nella forma

$$U(\theta) = a(\sin \theta + \cos^2 \theta)$$

a meno di costanti additive e per una certa costante reale a . Si calcolino le posizioni di equilibrio del sistema, e si valuti se sono stabili o meno.

Suggerimento. Sull'intervallo $[-\pi, \pi)$, l'equazione $\sin \theta = 1/2$ ha come soluzioni $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

- C** Si calcoli la reazione vincolare Φ_O in O in condizioni statiche. Per quale valore di θ il suo modulo è massimo?

SOLUZIONE

A Calcoliamo anzitutto la posizione del centro di massa del sistema. Sia x_A la posizione di A , x_B la posizione di B e $x_O = \mathbf{0}$ la posizione dell'origine. Il centro di massa G del sistema è quindi in

$$x_G = \frac{mx_A + 2mx_B + mx_O}{4m} = \frac{x_A + 2x_B}{4} = \ell \frac{\cos\theta - 2\sin\theta}{4} \hat{i}_1 + \ell \frac{\sin\theta + 2\cos\theta}{4} \hat{i}_2.$$

Come da suggerimento, la maniera più semplice di procedere è quella di utilizzare il teorema di Huygens–Steiner: calcoliamo prima il momento d'inerzia rispetto all'asse ortogonale al piano passante per O ,

$$I_O = md^2(A, O) + 2md^2(B, O) = 3m\ell^2,$$

dove abbiamo usato il fatto che $d(A, O) = d(B, O) = \ell$, mentre la massa in O non contribuisce essendo esattamente sull'asse. “Trasliamo” ora questa quantità riferendola a G usando il teorema. Tenendo conto del fatto che i vettori x_A e x_B sono ortogonali e hanno entrambi modulo ℓ ,

$$d^2(G, O) = \|x_G\|^2 = \langle x_G, x_G \rangle = \frac{\|x_A\|^2 + 4\|x_B\|^2}{16} = \frac{5\ell^2}{16}.$$

Osservando che la massa totale del sistema è $4m$,

$$I_G = I_O - 4md^2(G, O) = 3m\ell^2 - 4m \frac{5\ell^2}{16} = \frac{7}{4}m\ell^2.$$

B Sul sistema agiscono solo forze attive conservative, ovvero la forza gravitazionale e quella elastica, per cui possiamo studiare il potenziale in funzione del parametro lagrangiano θ che, a meno di periodicità, possiamo intendere su $[-\pi, \pi)$, e scrivere

$$U(\theta) = -4mgy_G - \frac{1}{2}k(\ell - x_A)^2 + c = -mg\ell(\sin\theta + 2\cos\theta) - \frac{1}{2}k\ell^2(1 - \cos\theta)^2 + c'$$

dove $y_G = \ell \frac{\sin\theta + 2\cos\theta}{4}$ e $x_A = \ell \cos\theta$ sono rispettivamente l'ordinata del centro di massa e l'ascissa di A , mentre c, c' sono costanti. Espandendo e imponendo il fatto che $m = \frac{k\ell}{2g}$ si trova

$$U(\theta) = -\frac{k\ell^2}{2} (\sin\theta + \cos^2\theta) + c''.$$

Non essendoci punti estremali nel supporto di U , cerchiamo direttamente i punti di equilibrio imponendo

$$\partial_\theta U(\theta) = -\frac{k\ell^2}{2} (\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta) = -\frac{k\ell^2}{2} \cos\theta(1 - 2\sin\theta) = 0$$

che fornisce $\cos\theta = 0$ e $\sin\theta = 1/2$, ovvero, a meno di periodicità di 2π ,

$$\theta_\pm = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \theta_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\pi.$$

Per studiarne la stabilità, consideriamo la derivata seconda,

$$\partial_\theta^2 U(\theta) = \frac{k\ell^2}{2} (\sin\theta - 4\sin^2\theta + 2).$$

Abbiamo che $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\theta_\pm} = -\frac{1}{2}k\ell^2 < 0$ e $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\theta_-} = -\frac{3}{2}k\ell^2 < 0$, ovvero θ_\pm sono punti di massimo per U e quindi stabili; viceversa, $\theta_{1,2}$ hanno $\sin\theta_{1,2} = 1/2$ per cui $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\theta_{1,2}} = \frac{3}{4}k\ell^2 > 0$, per cui i punti sono di equilibrio instabile.

C Dalla prima equazione cardinale della statica, abbiamo che la reazione vincolare Φ_O in O deve essere opposta a tutte le forze attive, ovvero

$$\Phi_O = -4mg - k(x_C - x_A) = 4mg\hat{i}_2 + k\ell(1 - \cos\theta)\hat{i}_1,$$

dove $g = -g\hat{i}_2$ è l'accelerazione di gravità e abbiamo usato $2mg = k\ell$. Il modulo quadro del vettore è $\|\Phi_O\|^2 = 16m^2g^2 + k^2\ell^2(1 - \cos\theta)^2$, che è massimo quando il secondo termine è massimo, ovvero $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$, a meno di periodicità (alternativamente, si possono calcolare derivata prima e seconda per verificare questo fatto).