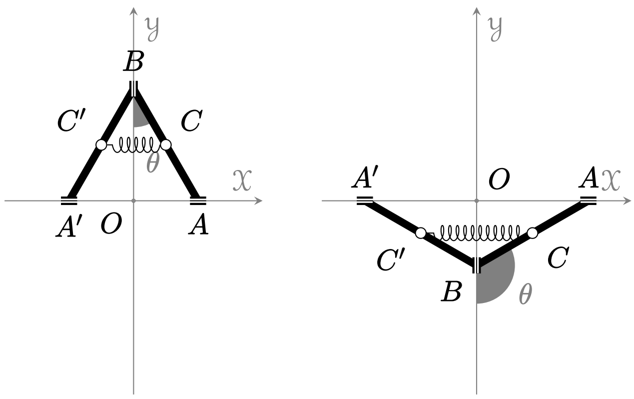
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

15 Luglio 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Il voto minimo per l'accesso all'orale è `15/30`.

In un piano verticale sono date due aste omogenee, $\overline{AB}$ e $\overline{A'B}$, ciascuna di massa m e lunghezza ℓ. Gli estremi A e A' sono vincolati a scorrere lungo l'asse delle ascisse $\mathcal{X}$: in particolare, A è vincolata a scorrere sul semiasse positivo, mentre A' scorre sul semiasse negativo. L'estremo comune B è invece vincolato a scorrere sull'asse verticale $\mathcal{Y}$. In figura sono date due possibili configurazioni del sistema. Tutti i vincoli sono realizzati per mezzo di carrelli ideali. Infine, i centri delle due aste sono collegati tra loro da una molla ideale, di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $k > 0$: la molla è fissata in maniera tale da non impedire in alcun modo lo scorrimento di B lungo l'asse delle ordinate.



Utilizzando come parametro lagrangiano l'angolo θ in figura, si risponda a quanto segue.

- **A** Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse $\mathcal{Z}$ passante per l'origine e ortogonale al piano in cui giace il sistema.
- **B** Si calcoli il momento risultante delle forze attive rispetto all'origine $\tau_O^{(a)}$.
- **C** Si identifichino le configurazioni di equilibrio — ordinarie e di confine — del sistema e se ne studi la stabilità.
- **D** Si calcoli il lavoro effettuato dalla forza peso passando da una configurazione con $\theta = \frac{\pi}{4}$ ad una configurazione con $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Soluzione

Utilizziamo come parametro lagrangiano l'angolo θ già indicato in figura. L'angolo è tale che $\theta \in [0, \pi]$, per cui $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono di confine.

A Possiamo calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse $\mathcal{Z}$ usando il teorema di Huygens–Steiner su entrambe le aste. Otteniamo

$$I_{\mathcal{Z}} = 2\frac{1}{12}m\ell^2 + md^2(O,C) + md^2(O,C') = \frac{1}{6}m\ell^2 + \frac{1}{2}m\ell^2 = \frac{2}{3}m\ell^2.$$

Per il calcolo abbiamo usato il fatto che, indicando con $\boldsymbol{x}_C = \frac{\ell}{2}(\sin\theta\hat{\imath}_1 + \cos\theta\hat{\imath}_2)$ e $\boldsymbol{x}_{C'} = \frac{\ell}{2}(-\sin\theta\hat{\imath}_1 + \cos\theta\hat{\imath}_2)$ i vettori che identificano i due punti C e C' rispettivamente, $\|\boldsymbol{x}_C\| = d(O,C) = \frac{\ell}{2} = \|\boldsymbol{x}_{C'}\| = d(O,C')$ (o si può vedere anche da proprietà fondamentali dei triangoli rettangoli).

B Sono presenti quattro forze attive, due interne (applicate ai due estremi della molla) e due esterne (le due forze peso applicate alle aste). Le forze interne forniscono un contributo nullo. Indicando con $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' = -mg\hat{\imath}_2$ le forze peso delle due aste, abbiamo

$$\tau_O^{(\mathrm{a})} = \boldsymbol{x}_C \wedge \boldsymbol{F} + \boldsymbol{x}_{C'} \wedge \boldsymbol{F}' = (\boldsymbol{x}_C + \boldsymbol{x}_{C'}) \wedge \boldsymbol{F} = -mg\ell\cos\theta\hat{\imath}_2 \wedge \hat{\imath}_2 = \boldsymbol{0}.$$

C Essendo tutte le forze in gioco conservative e i vincoli ideali, possiamo studiare le configurazioni di equilibrio per mezzo del potenziale. Essendo il centro di massa in $\boldsymbol{x}_G = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_C + \boldsymbol{x}_{C'}) = \frac{\ell}{2}\cos\theta\hat{\imath}_2$, ed essendo $d(C,C') = \ell\sin\theta$,

$$U(\theta) = -mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}kd^2(C,C') + \text{cost.} = -mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta + \text{cost.}$$

La configurazioni ordinarie di equilibrio si trovano risolvendo in $\theta \in (0,\pi)$ l'equazione

$$\partial_\theta U(\theta) = k\ell^2\sin\theta(\eta - \cos\theta) = 0$$

dove abbiamo introdotto $\eta = \frac{mg}{k\ell}$. Questa equazione ha soluzione

$$\theta_0 = \arccos\eta$$

nell'intervallo considerato se $\eta < 1$. La sua stabilità si può studiare considerando la derivata seconda

$$\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\theta_0} = k\ell^2(1 + \eta\cos\theta - 2\cos^2\theta)|_{\theta=\theta_0} = k\ell^2(1 - \eta^2),$$

che è sempre positivo nell'intervallo ammesso, per cui questa posizione di equilibrio, quando esiste, è instabile.

Lo studio delle configurazioni di confine $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ è più delicato perché richiede l'espansione di U attorno a tali posizioni per uno spostamento infinitesimo $\delta\theta$, valutando se $\delta U \leq 0$ perché la configurazione sia di equilibrio. Sia per $\theta = 0$ che per $\theta = \pi$, abbiamo che $\partial_\theta U = 0$: questo significa che entrambe le configurazioni sono di equilibrio. Tuttavia, per studiarne la stabilità, occorre ispezionare gli ordini superiori. Per $\theta = 0$

$$\delta U = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0}(\delta\theta)^2 + o((\delta\theta)^2) = \frac{k\ell^2(\eta-1)}{2}(\delta\theta)^2 + o((\delta\theta)^2) \leq 0 \Leftrightarrow \eta \leq 1$$

ovvero $\theta = 0$ è di equilibrio stabile solo per $\eta \leq 1$. Analogamente, per $\theta = \pi$,

$$\delta U = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\pi}(\delta\theta)^2 + o((\delta\theta)^2) = -\frac{k\ell^2(\eta+1)}{2}(\delta\theta)^2 + o((\delta\theta)^2) \leq 0 \Leftrightarrow \forall\eta > 0$$

ovvero la configurazione ottenuta per $\theta = \pi$ è sempre stabile.

D Essendo la forza peso una forza conservativa, è sufficiente calcolare la variazione di potenziale tra le due configurazioni indicate, facendo riferimento alla posizione del centro di massa. Il potenziale associato alla forza peso è

$$U_g(\theta) = -mg\ell\cos\theta + \text{costante}.$$

Abbiamo così che il lavoro compiuto dalla forza peso è dato da

$$W_g\left(\left[\theta = \tfrac{\pi}{4}\right] \to \left[\theta = \tfrac{3\pi}{4}\right]\right) = U_g\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) - U_g\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = mg\ell\sqrt{2}.$$