ESAME DI ANALISI MATEMATICA T–2

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

18 Giugno 2024

Istruzioni. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Ogni quesito corrisponde ad un numero di punti specificato a fine domanda. Il punteggio minimo per accedere alla prova orale è `15/30`.

Esercizio A

Dato un sistema cartesiano ortonormale $Oe_1e_2e_3$, si considerino i vettori

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

A1 Si scrivano l'equazione parametrica e le equazioni cartesiane della retta $\mathcal{R}$ passante per i punti individuati da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. [`7 pt`]

A2 Si consideri il piano individuato dai punti $\boldsymbol{x}$ tali che

$$\Pi\colon \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle = 0, \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_2 + k\boldsymbol{e}_3$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Si trovi il punto di intersezione $P = \mathcal{R} \cap \Pi$ al variare di k: per quali valori di k tale punto non esiste? [`8 pt`]

Esercizio B

Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 1 + x^2 - y^2, \qquad \binom{x}{y} \in \mathcal{K}$$

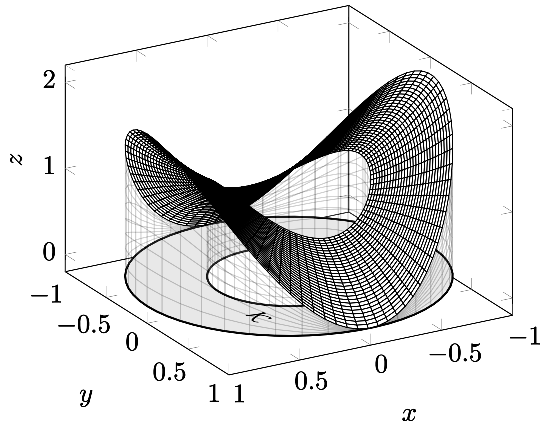
definita sul dominio

$$\mathcal{K} := \left\{ (x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \colon 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

e rappresentata in figura.

B1 Si calcoli l'area della superficie associata ad f. [`8 pt`]

B2 Si calcoli il volume compreso tra detta superficie e la sua proiezione sul piano xy. [`7 pt`]



Soluzione

Esercizio A.

A1 Si può procedere in diversi modi. Uno di questi è osservare che il vettore x appartenente alla retta deve essere tale che $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ con $t \in \mathbb{R}$, che è l'equazione parametrica cercata. Questa corrisponde al set di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - a_1 = t(b_1 - a_1) \\ x_2 - a_2 = t(b_2 - a_2) \\ x_3 - a_3 = t(b_3 - a_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = 0 \\ x_2 + 1 = 2t \\ x_3 - 1 = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

che sono le equazioni cartesiane cercate.

A2 Usando la rappresentazione cartesiana sopra, il punto P cercato ha coordinate date dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + kx_3 = 0 \end{cases} .$$

Applicando per esempio il metodo di Gauss alla matrice orlata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 & -1 \end{array}\right)$$

che fornisce come coordinate del punto P la terna $(x_1, x_2, x_3) = (1, \frac{k}{k-2}, \frac{1}{2-k})$ per $k \neq 2$: per $k = 2$, invece, il rango della matrice dei coefficienti è diverso da quello della matrice orlata e il punto di intersezione non esiste.

Esercizio B.

B1 Per calcolare l'area, usiamo la formula

$$\mathcal{A} = \iint\limits_{\mathcal{K}} \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y = \iint\limits_{\mathcal{K}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y.$$

Passiamo ora in coordinate polari, scrivendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, dove $\theta \in [0, 2\pi]$ e $r \in [1/\sqrt{2}, 1]$. Abbiamo

$$\mathcal{A} = \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} r\mathrm{d}r \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{1+4r^2} = 2\pi \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \sqrt{1+4r^2} r\mathrm{d}r \overset{t=r^2}{=} \pi \int\limits_{1/2}^{1} \sqrt{1+4t}\mathrm{d}t = \pi \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{6}$$

dove si è usato il fatto che $\int \sqrt{1 + at}\, \mathrm{d}\, t = \frac{2}{3a}(1 + at)^{3/2}$.

B2 Per calcolare il volume, si considera

$$\mathcal{V} = \iint\limits_{\mathcal{K}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} r\mathrm{d}r \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta (1 + r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) = 2\pi \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$$

dove si può usare che $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, \mathrm{d}\,\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, \mathrm{d}\,\theta$.