ESAME DI ANALISI MATEMATICA T–2

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

10 settembre 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Il punteggio minimo per accedere alla prova orale è `15/30`.

ESERCIZIO A

È data la seguente matrice, funzione del numero complesso $z \in \mathbb{C}$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} z & 0 & z \\ 0 & \bar{z} & \bar{z} \\ z & \bar{z} & \bar{z} \end{pmatrix},$$

dove come solito $\bar{z}$ è il complesso coniugato di z.

A1 Si calcolino le soluzioni dell'equazione

$$\det(\boldsymbol{A}) + 2 + 2i = 0.$$

A2 Si consideri ora $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sapendo che, sotto questa assunzione, $\boldsymbol{A}$ ha come autovalore $\lambda = z$, si calcoli il corrispondente autospazio Λ.

ESERCIZIO B

Un tempietto di raggio $R = \sqrt{2}$ (in una opportuna unità di misura) è coperto da una volta descritta dalla seguente funzione definita su $\mathcal{K} = \{(x,y) \colon 0 \le x^2 + y^2 \le 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

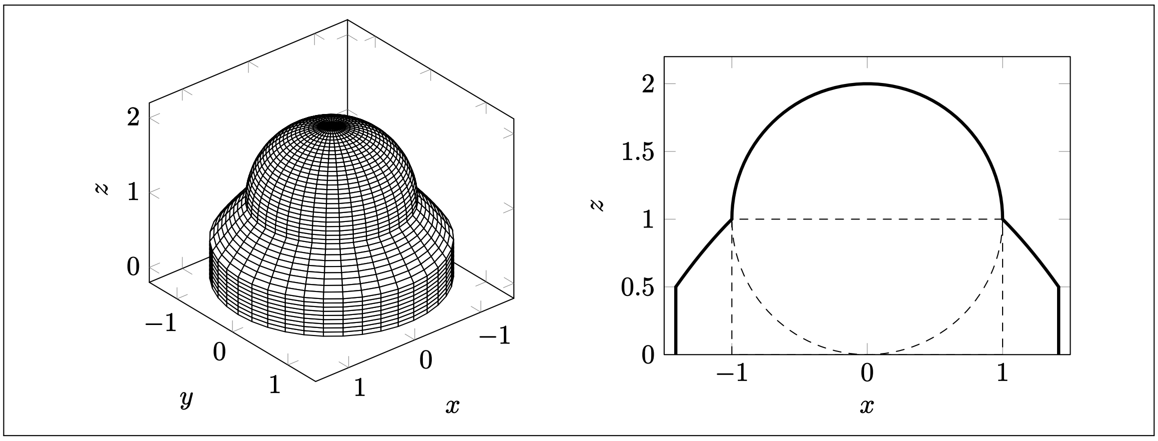
$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{se} \quad 0 \le x^2 + y^2 \le 1, \\ \dfrac{3 - x^2 - y^2}{2} & \text{se} \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 2. \end{cases}$$

La porzione interna dell'ambiente, di raggio $r = 1$, è quindi coperta da una semisfera, il cui centro si trova a quota $z = 1$, mentre la restante parte è coperta da una porzione di volta parabolica.

B1 Si calcoli il volume dell'ambiente, ovvero dello spazio compreso tra la volta e il piano $z = 0$.

B2 Si calcoli l'area della volta.

Suggerimento. Il calcolo dell'area e del volume corrispondenti alla porzione di volta ottenuta per $0 \le x^2 + y^2 \le 1$ non necessita di un integrale.



Formule utili. Volume di una sfera di raggio r: $\frac{4}{3}\pi r^3$. Area della superficie di una sfera di raggio r: $4\pi r^2$.

Soluzione

Esercizio A.

A1 Il determinante di $\boldsymbol{A}$ si può calcolare, per esempio, usando la regola di Sarrus ed è pari a
$$\det(\boldsymbol{A}) = |z|^2\bar{z} - |z|^2 z - \bar{z}|z|^2 = -|z|^2 z.$$
Dobbiamo ora risolvere $z|z|^2 = 2+2i$. Possiamo procedere in diversi modi. Per esempio, scrivendo $z = x+iy$, l'equazione prende la forma
$$(x+iy)(x^2+y^2) = 2+2i \Leftrightarrow (x^2+y^2)x + iy(x^2+y^2) = 2+2i \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+y^2) = 2 \\ y(x^2+y^2) = 2 \end{cases}.$$
Assumendo $z \neq 0$ e $y \neq 0$, dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene $\frac{x}{y} = 1$, ovvero $x = y$, da cui, sostitutendo nella prima, $2x^3 = 2 \Rightarrow x = 1$, per cui $z = 1+i$. D'altra parte, una soluzione reale è inammissibile e quindi y non può essere nullo. Un metodo diverso e standard è utilizzare la rappresentazione polare, scrivendo $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ per $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ e $2+2i = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, di modo che l'equazione diventa $r^3\,\mathrm{e}^{i\theta} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, ovvero $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $r = \sqrt{2}$, così che $z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$.

A2 In questo caso, avendo assunto z reale, $z = \bar{z}$ e quindi la condizione che z sia autovalore della matrice ottenuta si scrive
$$\begin{pmatrix} z & 0 & z \\ 0 & z & z \\ z & z & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & z \\ z & z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Questo sistema si risolve facilmente in quanto fornisce subito $x_3 = 0$ e $x_1 + x_2 = 0$, per cui l'autospazio corrispondente all'autovalore z è $\Lambda = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \colon \boldsymbol{v} = t(1,-1,0)^\intercal, \quad t \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio B.

B1 Possiamo immaginare di decomporre l'ambiente in tre porzioni: un cilindro centrale di area di base $\pi r^2 = \pi$ e altezza 1, ovvero volume π, la semisfera al di sopra di esso, che ha volume $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi$, e la porzione periferica che copre i punti (x,y) tali che $1 \leq x^2+y^2 \leq 2$. Quest'ultima contribuisce al volume con
$$\iint\limits_{1\leq x^2+y^2\leq 2} \frac{3-x^2-y^2}{2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_1^{\sqrt{2}}\frac{3-r^2}{2}r\,\mathrm{d}\,r = \frac{3\pi}{4}.$$
Mettendo insieme i tre contributi
$$V = \frac{2}{3}\pi + \pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{29}{12}\pi.$$

B2 Come prima, possiamo dividere la volta in due porzioni: la semisfera di raggio $r = 1$, che ha area $\frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2 = 2\pi$, e la restante parte che copre i punti (x,y) tali che $1 \leq x^2+y^2 \leq 2$ e che possiamo calcolare nel modo usuale, ovvero
$$\begin{aligned}\int\limits_{1\leq x^2+y^2\leq 2}\sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= \int\limits_{1\leq x^2+y^2\leq 2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\ &= 2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}r\,\mathrm{d}\,r = 2\pi\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3},\end{aligned}$$
dove nel secondo passaggio siamo passati da coordinate cartesiane a coordinate polari. Di conseguenza l'area della volta è
$$A = 2\pi + 2\pi\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3} = 2\pi\frac{3+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}.$$