

ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

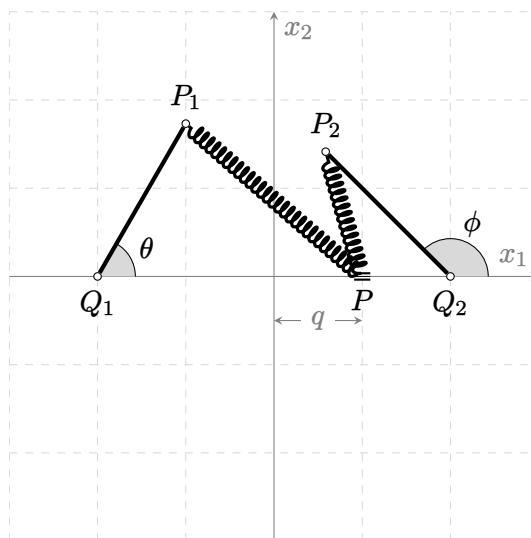
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA E BIOCHIMICA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

14 Settembre 2026

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

ESERCIZIO

Sia $O\hat{i}_1\hat{i}_2$ un riferimento cartesiano inerziale in un piano verticale, dove $\hat{i}_2$ è scelto in modo che sia diretto verso l'alto. Un'asta di lunghezza $r > 0$ e massa $m > 0$ giace in tale piano ed è vincolata con un giunto ideale a ruotare attorno ad Q_1 , punto tale che $\overrightarrow{OQ_1} = -r\hat{i}_1$. Sia P_1 il suo estremo libero. Una seconda asta, anch'essa di lunghezza r e massa m , è incardinata in Q_2 , tale che $\overrightarrow{OQ_2} = r\hat{i}_1$. Sia P_2 l'estremo libero della seconda asta. Infine, un carrello ideale P di massa nulla scorre liberamente sull'asse delle ascisse: indichiamo $\overrightarrow{OP} = q\hat{i}_1$. Il carrello è collegato a P_1 e P_2 da due molle ideali, di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$. Le aste sono omogenee.



Usando le quantità θ , ϕ e q in figura come coordinate generalizzate, si risponda alle seguenti domande.

- A** Si calcoli la posizione del centro di massa del sistema in funzione di θ e ϕ .
- B** Si scriva l'espressione del potenziale associato al sistema. Si esprima il valore di q all'equilibrio in termini di θ e ϕ . Utilizzando l'espressione ottenuta, si scrivano le condizioni di equilibrio per θ e ϕ in termini del parametro $\eta := \frac{mg}{kr}$ rimuovendo la dipendenza da q . Per quali valori di $\alpha \in (0, \pi/2)$ la configurazione

$$(\theta, \phi) = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

è di equilibrio? Qual è il valore di q associato a tale configurazione?

- C** Si calcoli il momento di inerzia dell'asta $\overline{Q_1P_1}$ rispetto all'asse ortogonale al piano passante per il centro di massa dell'asta $\overline{Q_2P_2}$ assumendo che le aste siano nella configurazione di equilibrio data sopra.

Segue

QUESITI

- (1) È dato il seguente sistema di forze con i relativi punti di applicazione nello spazio tridimensionale $\mathcal{S} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3)\}$. Sia $\vec{r} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2$ e $\vec{a} = \hat{i}_1 - \hat{i}_2$.

- $\vec{OP}_1 = \vec{a} \wedge \vec{r}, \vec{F}_1 = \hat{i}_1$;
- $\vec{OP}_2 = \vec{r} + \vec{OP}_1, \vec{F}_2 = 2\hat{i}_2$;
- $\vec{OP}_3 = \frac{\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2}{2}, \vec{F}_3 = 3\hat{i}_3$.

Si calcoli la risultante delle forze $\vec{R}$, e il loro momento totale $\vec{\tau}_O$ rispetto all'origine; si scriva il valore dell'invariante scalare I associato al sistema $\mathcal{S}$. Si calcoli infine l'equazione dell'asse centrale del sistema di forze.

- (2) È dato un piano con riferimento cartesiano $O\hat{i}_1\hat{i}_2$; un punto materiale P si muove in tale piano in modo che $\vec{OP} = x_1\hat{i}_1 + x_2\hat{i}_2$. Sul punto agisce una forza $\vec{F}_P(\vec{x}) = x_1(\hat{i}_1 + \hat{i}_2)$. Si calcoli il potenziale associato a questa forza posizionale, o si giustifichi il motivo per cui tale potenziale non esiste.

SOLUZIONE

Problema.

- A** Indichiamo con G_1 e G_2 i centri di massa delle due aste. Tutti gli angoli sono considerati modulo 2π . Dalla definizione degli angoli in figura si ricavano le posizioni degli estremi liberi delle due aste:

$$\overrightarrow{OP_1} = r(-1 + \cos \theta) \hat{i}_1 + r \sin \theta \hat{i}_2,$$

$$\overrightarrow{OP_2} = r(1 + \cos \phi) \hat{i}_1 + r \sin \phi \hat{i}_2.$$

Essendo le aste omogenee, i rispettivi centri di massa si trovano nei punti medi:

$$\overrightarrow{OG_1} = r \left(-1 + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \hat{i}_1 + \frac{r}{2} \sin \theta \hat{i}_2,$$

$$\overrightarrow{OG_2} = r \left(1 + \frac{1}{2} \cos \phi \right) \hat{i}_1 + \frac{r}{2} \sin \phi \hat{i}_2.$$

Le molle e il carrello hanno massa nulla. La massa totale del sistema è quindi $2m$, e la posizione del centro di massa G è

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OG_1} + m\overrightarrow{OG_2}}{2m}.$$

Sostituendo le espressioni precedenti si ottiene

$$\overrightarrow{OG} = \frac{r}{4} (\cos \theta + \cos \phi) \hat{i}_1 + \frac{r}{4} (\sin \theta + \sin \phi) \hat{i}_2.$$

- B** Ponendo uguale a zero il potenziale gravitazionale sull'asse x_1 , si ha

$$V_g(\theta, \phi) = mg y_{G_1} + mg y_{G_2} = \frac{mgr}{2} (\sin \theta + \sin \phi).$$

Le molle hanno lunghezza a riposo nulla. La posizione del carrello è $\overrightarrow{OP} = q \hat{i}_1$. La lunghezza al quadrato della prima molla è

$$\|\overrightarrow{PP_1}\|^2 = (q + r - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta.$$

Analogamente, per la seconda molla,

$$\|\overrightarrow{PP_2}\|^2 = (q - r - r \cos \phi)^2 + r^2 \sin^2 \phi.$$

Utilizzando questi risultati è possibile scrivere l'energia potenziale totale del sistema,

$$V(\theta, \phi, q) = \frac{mgr}{2} (\sin \theta + \sin \phi) + \frac{k}{2} \left[(q + r - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta + (q - r - r \cos \phi)^2 + r^2 \sin^2 \phi \right].$$

La condizione di equilibrio relativa al carrello è

$$\frac{\partial V}{\partial q} = k [2q - r(\cos \theta + \cos \phi)] \Rightarrow q_{\text{eq}} = \frac{r}{2} (\cos \theta + \cos \phi).$$

Le derivate del potenziale rispetto agli angoli sono

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{mgr}{2} \cos \theta + kr(q+r) \sin \theta, \quad \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{mgr}{2} \cos \phi + kr(q-r) \sin \phi.$$

Sostituendo $q = \frac{r}{2} (\cos \theta + \cos \phi)$ e dividendo entrambe le equazioni per $kr^2/2$, si ottiene

$$\eta \cos \theta + (2 + \cos \theta + \cos \phi) \sin \theta = 0 \quad \eta \cos \phi + (-2 + \cos \theta + \cos \phi) \sin \phi = 0.$$

Queste sono le condizioni di equilibrio prive della variabile q . Cerchiamo ora soluzioni nella forma $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$. Le equazioni diventano

$$2 \cos \alpha - \eta \sin \alpha = 0, \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{2}{\eta} \in (0, \pi/2).$$

Il valore di q corrispondente è $q = 0$.

Segue

C L'asse richiesto è ortogonale al piano e passa per il centro di massa G_2 della seconda asta. Il momento di inerzia della prima asta rispetto all'asse $\mathcal{G}_1$ parallelo passante per il proprio centro di massa G_1 è $I_{\mathcal{G}_1} = \frac{mr^2}{12}$. Applicando il teorema di Huygens–Steiner, il momento rispetto alla retta $\mathcal{G}_2$ ortogonale al piano passante per G_2 è $I_{\mathcal{G}_2}^{(1)} = I_{\mathcal{G}_1} + m\|\overrightarrow{G_2G_1}\|^2$. La posizione relativa dei due centri di massa è

$$\overrightarrow{G_2G_1} = \overrightarrow{OG_1} - \overrightarrow{OG_2} = r \left(-2 + \frac{\cos \theta - \cos \phi}{2} \right) \hat{i}_1 + \frac{r}{2} (\sin \theta - \sin \phi) \hat{i}_2.$$

Ne segue che

$$\|\overrightarrow{G_2G_1}\|^2 = r^2 (2 + \sin \alpha)^2.$$

Pertanto

$$I_{\mathcal{G}_2}^{(1)} = mr^2 \left[\frac{1}{12} + (2 + \sin \alpha)^2 \right].$$

Quesiti.

(1) Il primo punto è definito da

$$\overrightarrow{OP_1} = \vec{a} \wedge \vec{r} = (\hat{i}_1 - \hat{i}_2) \wedge (\hat{i}_1 + \hat{i}_2) = \hat{i}_1 \wedge \hat{i}_2 - \hat{i}_2 \wedge \hat{i}_1 = \hat{i}_3 + \hat{i}_3 = 2\hat{i}_3$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \vec{r} + \overrightarrow{OP_1} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 + 2\hat{i}_3,$$

$$\overrightarrow{OP_3} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}}{2} = \frac{1}{2}\hat{i}_1 + \frac{1}{2}\hat{i}_2 + 2\hat{i}_3.$$

La risultante è

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \hat{i}_1 + 2\hat{i}_2 + 3\hat{i}_3.$$

Il momento della prima forza è

$$\vec{\tau}_1 = \overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{F}_1 = 2\hat{i}_3 \wedge \hat{i}_1 = 2\hat{i}_2.$$

Il momento della seconda forza è

$$\vec{\tau}_2 = \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{F}_2 = (\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + 2\hat{i}_3) \wedge 2\hat{i}_2 = -4\hat{i}_1 + 2\hat{i}_3.$$

Il momento della terza forza è

$$\vec{\tau}_3 = \overrightarrow{OP_3} \wedge \vec{F}_3 = \left(\frac{1}{2}\hat{i}_1 + \frac{1}{2}\hat{i}_2 + 2\hat{i}_3 \right) \wedge 3\hat{i}_3 = \frac{3}{2}\hat{i}_1 - \frac{3}{2}\hat{i}_2.$$

Pertanto

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 = -\frac{5}{2}\hat{i}_1 + \frac{1}{2}\hat{i}_2 + 2\hat{i}_3.$$

L'invariante scalare del sistema è

$$I = \langle \vec{R}, \vec{\tau}_O \rangle = \frac{9}{2}.$$

L'asse centrale ha equazione vettoriale

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\tau}_O}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}.$$

Calcoliamo il prodotto vettoriale:

$$\vec{R} \wedge \vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}\hat{i}_1 - \frac{19}{2}\hat{i}_2 + \frac{11}{2}\hat{i}_3.$$

Di conseguenza,

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{5}{28}\hat{i}_1 - \frac{19}{28}\hat{i}_2 + \frac{11}{28}\hat{i}_3 + \lambda(\hat{i}_1 + 2\hat{i}_2 + 3\hat{i}_3).$$

(2) Affinché esista un potenziale scalare V tale che $\vec{F}_P = -\nabla V$, in un dominio semplicemente connesso deve essere soddisfatta la condizione $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$. Nel caso in esame, $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 1$, per cui non esiste un potenziale scalare associato alla forza.