ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

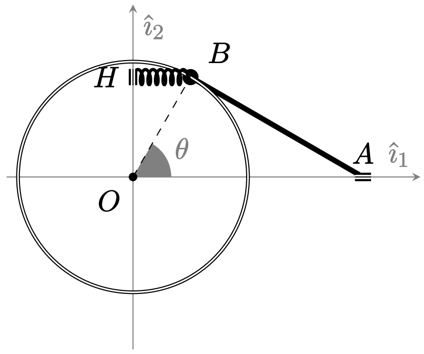
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA E BIOCHIMICA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

9 Febbraio 2026

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

ESERCIZIO

Un'asta di lunghezza 2ℓ e massa m ha un estremo A vincolato a scorrere orizzontalmente sul semiasse positivo delle ascisse in un riferimento cartesiano ortogonale, come in figura. Il suo secondo estremo, detto B, scorre senza attrito sul bordo di un anello verticale complanare all'asta, di raggio ℓ e centrato nell'origine del riferimento. Inoltre, una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega B con l'asse verticale, al quale essa è agganciata con un carrello ideale H che permette alla molla di tenersi sempre orizzontale. Infine, in B è fissata una massa puntiforme di valore m.



Usando l'angolo θ in figura come parametro lagrangiano, si risponda alle seguenti domande.

A Si calcolino la posizione del centro di massa G e il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse ortogonale al piano in cui esso giace e passante per G.

B Si calcolino le posizioni di equilibrio del sistema e si dica se esse sono stabili o instabili al variare del parametro $\eta = \frac{3mg}{k\ell} > 0$.

C Si scriva l'equazione della *base* associata al moto dell'asta.

QUESITI

(1) È dato il seguente sistema di forze con i relativi punti di applicazione nello spazio tridimensionale $\mathcal{S} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3)\}$, dove, in opportune unità,
- $\overrightarrow{OP_1} = 3\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2$, $\vec{F}_1 = \hat{\imath}_1$;
- $\overrightarrow{OP_2} = \hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3$, $\vec{F}_2 = -2\hat{\imath}_2$;
- $\overrightarrow{OP_3} = \hat{\imath}_1$, $\vec{F}_3 = 3\hat{\imath}_3$.

Si calcoli la risultante delle forze $\vec{R}$, e il loro momento totale $\vec{\tau}_O$ rispetto all'origine; si scriva il valore dell'invariante scalare I associato al sistema $\mathcal{S}$.

(2) Sono dati due riferimenti, ovvero un riferimento "fisso" $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ e un riferimento "mobile" $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ con stessa origine ma diversa base, di modo che

$$\hat{e}_1 = \cos t^2\,\hat{\imath}_1 + \sin t^2\,\hat{\imath}_2, \qquad \hat{e}_2 = -\sin t^2\,\hat{\imath}_1 + \cos t^2\,\hat{\imath}_2, \qquad \hat{e}_3 = \hat{\imath}_3.$$

Si calcoli il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ del riferimento mobile rispetto al riferimento fisso. Sia dato un punto materiale di traiettoria $\vec{x}(t) = t^2\hat{\imath}_1$ nel riferimento fisso; si scriva la sua velocità $\vec{v}^\star$ rispetto al riferimento mobile.

Soluzione

A Usiamo θ come in figura come parametro lagrangiano. Osserviamo anzitutto che

$$\overrightarrow{OA} = (\ell\cos\theta + 2\ell\cos\alpha)\hat{\imath}_1, \qquad \overrightarrow{OB} = \ell\cos\theta\hat{\imath}_1 + \ell\sin\theta\hat{\imath}_2,$$

dove $\alpha = \widehat{OAB}$ è tale che

$$\ell\sin\theta = 2\ell\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\theta \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}.$$

Dunque

$$\overrightarrow{OA} = \left(\ell\cos\theta + 2\ell\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}\right)\hat{\imath}_1, \qquad \overrightarrow{OB} = \ell\cos\theta\hat{\imath}_1 + \ell\sin\theta\hat{\imath}_2.$$

Il centro di massa G_a dell'asta è in

$$\overrightarrow{OG_a} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} = \left(\ell\cos\theta + \ell\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}\right)\hat{\imath}_1 + \frac{\ell}{2}\sin\theta\hat{\imath}_2.$$

Il centro di massa del sistema G è invece individuato da

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OG_a}+m\overrightarrow{OB}}{2m} = \left(\ell\cos\theta + \frac{\ell}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}\right)\hat{\imath}_1 + \frac{3\ell}{4}\sin\theta\hat{\imath}_2$$

Usando ora il fatto che il momento di inerzia di un asta omogenea di lunghezza 2ℓ e massa m rispetto ad un asse passante per il suo centro è $I_{G_a} = \frac{1}{12}m(2\ell)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$, abbiamo che il momento di inerzia del sistema è

$$I_G = \frac{1}{3}m\ell^2 + md^2(G_a,G) + md^2(B,G) = \frac{1}{3}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{5}{6}m\ell^2,$$

dove abbiamo utilizzato il teorema di Huygens–Steiner. Notiamo infatti che

$$d^2(G_a,G)=\|\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OG_a}\|^2=\left\|\frac{\ell}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}\hat{\imath}_1+\frac{\ell}{4}\sin\theta\hat{\imath}_2\right\|^2=\frac{\ell^2}{4}-\frac{\ell^2}{16}\sin^2\theta+\frac{\ell^2}{16}\sin^2\theta=\frac{\ell^2}{4},$$

da cui $d(G_a,G) = \ell/2$ e quindi $d(B,G) = \ell/2$ essendo G tra B e G_a.

B Sulla base di quanto detto, il potenziale è determinato dal contributo gravitazionale e da quello elastico, e in particolare, a meno di costanti additive ininfluenti, è pari a

$$V(\theta)=2m\left(\frac{3\ell}{4}\sin\theta\right)+\frac{k}{2}(\ell\cos\theta)^2=\frac{3\ell m}{2}\sin\theta+\frac{k\ell^2}{2}\cos^2\theta=\frac{k\ell^2}{2}(\eta\sin\theta+\cos^2\theta).$$

Le configurazioni di equilibrio possono essere individuate dalla condizione

$$V'(\theta) = \frac{k\ell^2}{2}\cos\theta(\eta - 2\sin\theta) = 0$$

per cui (limitandoci all'intervallo $[-\pi,\pi)$, abbiamo le due configurazioni $\theta_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$ e, se e solo se $\eta < 2$, $\theta_1 = \arcsin(\eta/2)$ e $\theta_2 = \pi - \arcsin(\eta/2)$. Per studiare la stabilità di questi punti, osserviamo che

$$V''(\theta) = -\frac{k\ell^2}{2}(\eta\sin\theta + 4\sin^2\theta - 2),$$

che fornisce $V''(\theta_+) = \frac{k\ell^2}{2}(2-\eta) < 0$, ovvero θ_+ è instabile se $\eta > 2$, diversamente è stabile, $V(\theta_-) = \frac{k\ell^2}{2}(\eta+2)$, ovvero θ_- è sempre stabile, e infine $V(\theta_{1,2}) = -k\ell^2(1-\frac{\eta^2}{4})$, ovvero $\theta_{1,2}$, quando esistono, sono configurazioni di equilibrio instabile.

C Per il teorema di Chasles, le coordinate del centro istantaneo di rotazione C possono essere ottenute intersecando le ortogonali alle velocità di due punti distinti del corpo rigido: in questo caso, possiamo scegliere A e B, osservando che C deve avere l'ascissa di A (dato che la velocità di A non ha componente lungo $\hat{\imath}_2$) e deve essere sul prolungamento di $\overrightarrow{OB}$, dato che B si muove sulla circonferenza, dunque C è tale che, detto

$$x_A := \ell\cos\theta + 2\ell\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta},$$

$\overrightarrow{OC} = x_A\hat{\imath}_1 + t\hat{\imath}_2 = \hat{t}\overrightarrow{OB}$, per una opportuna coppia t e $\hat{t}$. Questa uguaglianza determina

$$x_A = \hat{t}\ell\cos\theta, \qquad t = \hat{t}\ell\sin\theta = x_A\tan\theta \Rightarrow \overrightarrow{OC} = x_A(\hat{\imath}_1 + \tan\theta\hat{\imath}_2).$$

(1) La risultante è ottenuta semplicemente come $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \hat{\imath}_1 - 2\hat{\imath}_2 + 3\hat{\imath}_3$, mentre il momento totale è dato da $\vec{\tau}_O = \overrightarrow{OP_1}\wedge\vec{F}_1 + \overrightarrow{OP_2}\wedge\vec{F}_2 + \overrightarrow{OP_3}\wedge\vec{F}_3 = 2\hat{\imath}_1 - 3\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$. L'invariante scalare si ottiene come $I = \langle\vec{R},\vec{\tau}_O\rangle = 2+6-3 = 5$.

(2) Possiamo utilizzare la formula

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\hat{e}_a\wedge\dot{\hat{e}}_a = 2t\hat{\imath}_3 = 2t\hat{e}_3.$$

Osserviamo ora che $\vec{v} = \dot{\vec{x}} = 2t\hat{\imath}_1$. Si usa la relazione

$$\vec{v} = \vec{v}^\star + \vec{v}_\star + \vec{\omega}\wedge(\vec{x}-\vec{x}_\star) \Rightarrow \vec{v}^\star = \vec{v} - \vec{\omega}\wedge\vec{x} = 2t\hat{\imath}_1 - 2t\hat{\imath}_3\wedge(t^2\hat{\imath}_1) = 2t\hat{\imath}_1 - 2t^3\hat{\imath}_2,$$

dove abbiamo usato il fatto che l'origine è fissa e coincidente con lo stesso punto nei due riferimenti e quindi $\vec{x}_\star = \vec{0}$ e $\vec{v}_\star = \vec{0}$. Dal fatto ora che

$$\hat{\imath}_1 = \cos t^2\,\hat{e}_1 - \sin t^2\,\hat{e}_2, \qquad \hat{\imath}_2 = \sin t^2\,\hat{e}_1 + \cos t^2\,\hat{e}_2, \qquad \hat{\imath}_3 = \hat{e}_3.$$

possiamo riscrivere

$$\vec{v}^\star = 2t(\cos t^2 - t^2\sin t^2)\hat{e}_1 - 2t(t^2\cos t^2 + \sin t^2)\hat{e}_2.$$