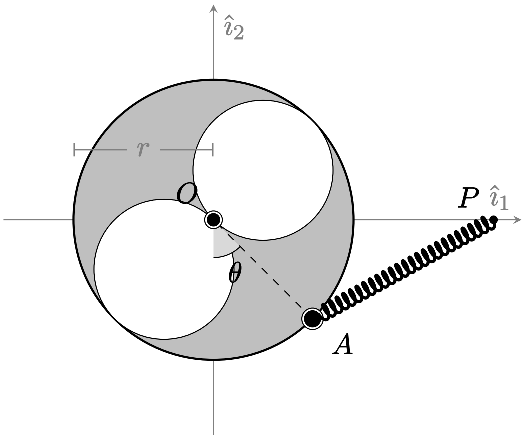
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA E BIOCHIMICA
CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

12 Gennaio 2026

Istruzioni. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. Sul foglio di risoluzione va indicato corso di laurea e numero di matricola.

Una lamina omogenea ha forma circolare di raggio r ed è imperneata nell'origine O di un riferimento cartesiano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$, tale che il piano generato dai vettori $\hat{\imath}_1$ e $\hat{\imath}_2$ sia verticale e che $\hat{\imath}_2$ sia contrario alla forza gravitazionale. La lamina può ruotare liberamente attorno ad O, dove agisce un vincolo ideale applicato a mezzo di una cerniera. Essa presenta inoltre due cavità circolari di raggio $r/2$, ciascuna tangente al bordo esterno e i cui centri giacciono sullo stesso diametro della lamina. La massa totale della lamina così descritta è pari ad m. Sia ora A un punto del bordo della lamina, tale che $\overrightarrow{OA}$ sia tangente a entrambe le cavità: in tale punto è saldata una massa puntiforme pari a m. La massa in A è collegata all'asse delle ascisse da una molla ideale di costante elastica k: la molla è fissata in un punto P che si trova sul semiasse positivo delle ascisse a distanza $2r$ da O.



Utilizzando come variabile lagrangiana l'angolo θ in figura, si risponda alle seguenti domande.

A Si identifichino le configurazioni di equilibrio del sistema, e se ne studi la stabilità.

B Si calcoli il momento di inerzia del sistema composto dal disco con cavità e dalla massa in A rispetto ad un asse perpendicolare al piano e passante per il centro di massa G.

C Si scriva la seconda equazione cardinale per il sistema rispetto al centro di riferimento O.

D Si calcoli l'energia cinetica del sistema in funzione di $\dot{\theta}$.

SOLUZIONE

A Il centro di massa della lamina coincide, per ragioni di simmetria, con l'origine, per cui l'unico contributo all'energia potenziale gravitazionale è dato dalla massa in A. L'energia potenziale è quindi

$$V(\theta) = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r^2 + 4r^2 - 4r^2\sin\theta),$$

dove il secondo contributo è dovuto alla molla. Le configurazioni di equilibrio si trovano via

$$V'(\theta) = mgr\sin\theta - 2kr^2\cos\theta = 0 \Rightarrow kr^2(\eta\sin\theta - 2\cos\theta) = 0, \qquad \eta := \frac{mg}{kr}.$$

Consideriamo $\theta \in (-\pi, \pi]$ (le configurazioni del sistema hanno una periodicità di 2π in questa variabile lagrangiana). Osserviamo che $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ non può essere soluzione per cui l'equazione può essere riscritta come

$$\tan\theta = \frac{2}{\eta} \Rightarrow \theta_1 = \arctan\frac{2}{\eta}, \quad \theta_2 = -\pi + \arctan\frac{2}{\eta}.$$

Si noti che una di queste soluzioni (θ_1) ha coseno positivo, l'altra ha coseno negativo. Per studiare la stabilità di queste configurazioni poniamo (per $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$)

$$V''(\theta) = kr^2(\eta\cos\theta + 2\sin\theta) = kr^2\cos\theta(\eta + 2\tan\theta).$$

Essendo in entrambe le soluzioni $\tan\theta = \frac{2}{\eta} > 0$, il segno della derivata seconda è determinato dal prefattore coseno: si ha quindi che θ_1 è stabile e θ_2 è instabile per ogni valore di η.

B Il momento di inerzia di un disco omogeneo di massa M raggio R rispetto ad un asse $\mathcal{A}$ ortogonale passante per il suo centro è $I_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}MR^2$. Per il teorema di Huygens–Steiner, il momento dello stesso disco rispetto ad un asse $\mathcal{A}'$ parallelo ad $\mathcal{A}$ passante per il suo bordo è $I_{\mathcal{A}'} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$. Per calcolare il momento di inerzia della lamina $I^\ell_{\mathcal{Z}}$ rispetto all'asse $\mathcal{Z}$ passante per O e ortogonale al piano, dobbiamo calcolare quindi

$$I^\ell_{\mathcal{Z}} = \frac{1}{2}m_1r^2 - 2\left(\frac{3}{2}m_2\frac{r^2}{4}\right),$$

dove m_1 è l'ipotetica massa della lamina "piena" mentre m_2 sono le masse corrispondenti alle quantità rimosse in modo che $m_1 - 2m_2 = m$. Essendo l'oggetto omogeneo, la sua densità è $\rho = \frac{m}{\pi r^2 - 2\pi(r/2)^2} = \frac{2m}{\pi r^2}$, per cui $m_1 = \rho\pi r^2 = 2m$ e $m_2 = \rho\pi\left(r/2\right)^2 = m/2$, da cui

$$I^\ell_{\mathcal{Z}} = \frac{5}{8}mr^2.$$

Il momento di inerzia totale si ottiene aggiungendo il contributo della massa in A,

$$I_{\mathcal{Z}} = I^\ell_{\mathcal{Z}} + mr^2 = \frac{13}{8}mr^2.$$

Per ottenere il momento rispetto alla retta $\mathcal{G}$ parallela a $\mathcal{Z}$ e passante per G, calcoliamo la posizione del centro di massa G, individuato da

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OO} + m\overrightarrow{OA}}{2m} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \Rightarrow d^2(O,G) = \|\overrightarrow{OG}\|^2 = \frac{1}{4}r^2.$$

Allora per il teorema di Huygens–Steiner,

$$I_{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{Z}} - 2md^2(O,G) = \frac{5}{8}mr^2 - \frac{1}{2}mr^2 = \frac{9}{8}mr^2.$$

C La forza elastica è orientata come $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (2r - r\sin\theta)\hat{\imath}_1 + r\cos\theta\hat{\imath}_2$ ed è in particolare uguale a $\vec{F}_{\text{el}} = k\overrightarrow{AP}$. La forza peso, d'altra parte, è applicata nel centro di massa G, ed è $\vec{F}_{\text{g}} = -2mg\hat{\imath}_2$. Il momento totale è

$$\vec{\tau}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_{\text{el}} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_{\text{g}} = \left(2kr^2\cos\theta - mgr\sin\theta\right)\hat{\imath}_3$$

dove abbiamo usato il fatto che la reazione vincolare ha contributo nullo in questa quantità. Scriviamo ora la seconda equazione cardinale per il sistema rispetto ad O, che è centro istantaneo di rotazione, per cui vale

$$\vec{\tau}_O = \overleftrightarrow{I}_O\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \overleftrightarrow{I}_O\vec{\omega}.$$

Poiché $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\imath}_3$ e quindi $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{\imath}_3$, ed inoltre $\overleftrightarrow{I}_O\hat{\imath}_3 = I_{\mathcal{Z}}\hat{\imath}_3$, abbiamo che

$$\left(2kr^2\cos\theta - mgr\sin\theta\right)\hat{\imath}_3 = I_{\mathcal{Z}}\ddot{\theta}\hat{\imath}_3 = \frac{13}{8}mr^2\ddot{\theta}\hat{\imath}_3$$

ovvero

$$\ddot{\theta} = \frac{16k}{13m}\cos\theta - \frac{8g}{13r}\sin\theta$$

D Osserviamo anzitutto che la velocità angolare della sistema si può scrivere come $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\imath}_3$: essendo O il centro istantaneo di rotazione

$$T = \frac{1}{2}I_{\mathcal{Z}}\dot{\theta}^2 = \frac{13}{16}mr^2\dot{\theta}^2.$$