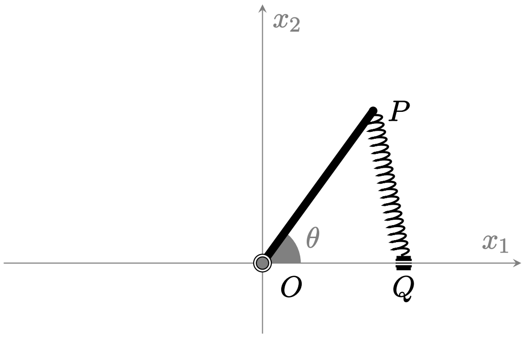
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

24 Luglio 2025

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

In un piano verticale è dato un riferimento cartesiano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ come in figura. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ, $\overline{OP}$, è incernierata nell'origine O in modo da poter ruotare liberamente. L'estremo P dell'asta è collegato ad un carrello Q di massa $2m$ che si muove liberamente e senza strisciare sull'asse delle ascisse.



Utilizzando l'ascissa q di Q e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse orizzontale (indicato in figura) come parametri lagrangiani, si risponda alle seguenti domande.

A Si calcoli la posizione del centro di massa del sistema.

B Si calcolino le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione del parametro

$$\eta = \frac{mg}{k\ell}.$$

Suggerimento. Si ricordi che, per $a \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$.

C Assumendo che la configurazione

$$q = 0, \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

sia di equilibrio, si dica per quali valori di $\eta \neq 1$ essa è stabile.

D Si calcoli il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse perpendicolare al piano e passante per Q.

SOLUZIONE

A Il centro di massa G_a dell'asta $\overline{OP}$ è nel suo punto medio, essendo l'asta omogenea. Poiché

$$\overrightarrow{OP} = \ell\cos\theta\hat{\imath}_1 + \ell\sin\theta\hat{\imath}_2 \Rightarrow \overrightarrow{OG_a} = \frac{\ell\cos\theta}{2}\hat{\imath}_1 + \frac{\ell\sin\theta}{2}\hat{\imath}_2.$$

Essendo il carrello in posizione $\overrightarrow{OQ} = q\hat{\imath}_2$, il centro di massa G è tale che

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OG_a} + 2m\overrightarrow{OQ}}{3m} = \frac{\ell\cos\theta + 4q}{6}\hat{\imath}_1 + \frac{\ell\sin\theta}{6}\hat{\imath}_2.$$

B L'energia potenziale del sistema, soggetto solo a vincoli ideali e forze conservative, è dovuta all'azione gravitazionale e alla molla, ed è data (a meno di una costante additiva globale arbitraria) da

$$V(q,\theta) = 3mg\frac{\ell\sin\theta}{6} + \frac{k}{2}\|\overrightarrow{OQ}\|^2 = \frac{mg\ell}{2}\sin\theta + \frac{k}{2}(q^2 + \ell^2 - 2q\ell\cos\theta).$$

Le posizioni di equilibrio possono essere trovate imponendo

$$\frac{\partial V}{\partial q} = k(q - \ell\cos\theta) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{mg\ell}{2}\cos\theta + qk\ell\sin\theta = 0.$$

Dalla prima equazione otteniamo $q = \ell\cos\theta$ e quindi

$$mg\ell\cos\theta + 2k\ell^2\cos\theta\sin\theta = \cos\theta(mg\ell + 2k\ell^2\sin\theta) = k\ell^2\cos\theta(\eta + 2\sin\theta) = 0.$$

Abbiamo quindi due possibili soluzioni per θ per ogni valore di η

$$\theta_\pm = \pm\frac{\pi}{2},$$

e due soluzioni aggiuntive quando $\eta \in (0,2]$,

$$\theta_1 = -\arcsin\frac{\eta}{2}, \qquad \theta_2 = \pi - \arcsin\frac{\eta}{2}.$$

che corrispondono a quattro possibili soluzioni per q, ovvero $q_\pm = 0$ per ogni valore di η e, se $\eta \in (0,2]$, $q_1 = \ell\sqrt{1 - \eta^2/4}$, $q_2 = -\ell\sqrt{1 - \eta^2/4}$.

C Per calcolare la stabilità di queste posizioni di equilibrio, consideriamo la matrice hessiana del potenziale,

$$\mathrm{Hess}[V](q,\theta) = \begin{pmatrix} \partial_q^2 V & \partial_{\theta,q}^2 V \\ \partial_{\theta,q}^2 V & \partial_\theta^2 V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k\ell\sin\theta \\ k\ell\sin\theta & -\frac{mg\ell}{2}\sin\theta + qk\ell\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo questa matrice nel punto di equilibrio dato, ovvero

$$\boldsymbol{H} := \mathrm{Hess}[V](0, -\pi/2) = \begin{pmatrix} k & -k\ell \\ -k\ell & \frac{mg\ell}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k\ell \\ -k\ell & \frac{\eta}{2}k\ell^2 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha determinante $\det\boldsymbol{H} = (\eta/2 - 1)k^2\ell^2$. Essendo $H_{11} > 0$, entrambi i suoi autovalori sono positivi se e solo se $\eta > 2$: in questo caso, il punto dato è di equilibrio stabile.

D Il momento di un asta omogenea di lunghezza L e massa M rispetto ad un asse ad essa ortogonale passante per il suo centro di massa è $I_G = \frac{1}{12}ML^2$. Poiché la massa in Q non contribuisce al calcolo del momento di inerzia richiesto (essendo sull'asse di interesse), è sufficiente traslare in Q il contributo I_{G_a} del momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse passante per il suo centro di massa G_a utilizzando il teorema di Huygens–Steiner, ovvero

$$I_Q = \frac{1}{12}m\ell^2 + md^2(G_a,Q) = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell^2}{4} + q^2 - q\ell\cos\theta\right) = m\left(\frac{\ell^2}{3} + q^2 - q\ell\cos\theta\right).$$