ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

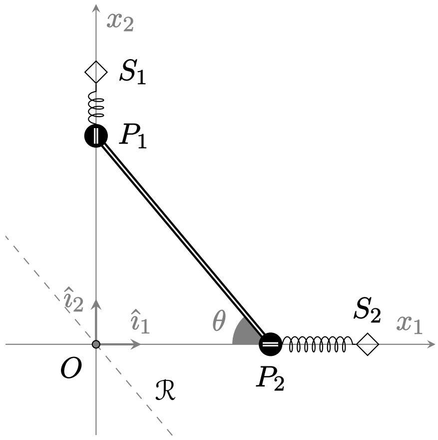
20 Giugno 2025

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

In un piano verticale, ove è assegnato un riferimento cartesiano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ come in figura, è data un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. L'asta è vincolata tramite due carrelli in P_1 e P_2 ai due assi cartesiani, di modo che P_1 possa scorrere lungo l'asse verticale e P_2 possa scorrere lungo l'asse orizzontale. Sull'estremo P_1 è saldata inoltre una massa m, collegata tramite una molla ad un perno fisso S_1 sul semiasse positivo verticale a distanza ℓ dall'origine. In maniera simile, sull'estremo P_2 è saldata una massa $2m$, collegata tramite una molla ad un perno fisso S_2 sul semiasse positivo orizzontale, anch'esso a distanza ℓ dall'origine. Le molle sono entrambe ideali, di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k tale che

$$mg = 2k\ell,$$

mentre i vincoli in azione sono lisci.



A Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema utilizzando come parametro lagrangiano l'angolo θ in figura, e dire se esse sono stabili o instabili.

B Si calcoli il momento delle forze attive rispetto al centro O del riferimento.

C Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse perpendicolare al piano in cui esso giace e passante *per il centro istantaneo di rotazione dell'asta.*

D Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta $\mathcal{R}$ passante per l'origine e parallela all'asta (tratteggiata in figura).
Suggerimento: Si calcoli il momento d'inerzia rispetto alla retta che attraversa l'asta e si ricorra al teorema di Huygens–Steiner.

Soluzione

A Usando come riferimento per l'energia potenziale gravitazionale l'asse delle ascisse, l'energia del sistema si può scrivere come

$$\begin{aligned}V(\theta) &= mgd(P_1, O) + \frac{1}{2}kd^2(S_1, P_1) + \frac{1}{2}kd^2(S_2, P_2)\\ &= 2k\ell^2 \sin\theta + \frac{1}{2}k\ell^2(1-\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k\ell^2(1-\cos\theta)^2\\ &= k\ell^2\sin\theta - k\ell^2\cos\theta + \frac{3}{2}k\ell^2.\end{aligned}$$

Notando che non ci sono configurazioni di confine, cerchiamo configurazioni di equilibrio ordinarie ponendo

$$0 = V'(\theta) = k\ell^2\cos\theta + k\ell^2\sin\theta = 0.$$

Studiando il problema in $(-\pi, \pi]$, osserviamo che $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm\pi/2$ non è soluzione dell'equazione, per cui possiamo dividere per $\cos\theta$ e scrivere

$$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta_- = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \theta_+ = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

Per studiare la stabilità delle due configurazioni, valutiamo la derivata seconda

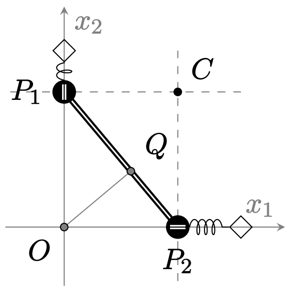
$$V''(\theta) = -k\ell^2\sin\theta + k\ell^2\cos\theta.$$

Osservando ora che $\sin\theta_\pm = -\cos\theta_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $V''(\theta_+) = -\frac{k\ell^2}{\sqrt{2}} - \frac{k\ell^2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}k\ell^2 < 0$ mentre $V''(\theta_-) = \frac{k\ell^2}{\sqrt{2}} + \frac{k\ell^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}k\ell^2 > 0$. Di conseguenza, θ_+ è un punto di equilibrio instabile, mentre θ_- è un punto di equilibrio stabile.

B Ci sono quattro forze attive agenti sul sistema: la forza peso e la forza elastica agenti su P_1 e la forza peso e la forza elastica agenti su P_2. Poiché entrambe le forze elastiche e la forza peso agente su P_1 hanno retta di applicazione passante per l'origine, queste hanno momento nullo. L'unico contributo non nullo è quello della forza peso agente su P_2. Indicando con $\vec{F}_{g,2} = -2mg\hat{\imath}_2$ questa forza peso, abbiamo

$$\vec{\tau}_O^{(a)} = \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{F}_{g,2} = (\ell\cos\theta\hat{\imath}_1) \wedge (-2mg\hat{\imath}_2) = -2mg\ell\cos\theta\hat{\imath}_3.$$

C Il centro istantaneo di rotazione dell'asta si può ottenere tracciando (per via del teorema di Chasles) le perpendicolari alle velocità di P_1 e P_2, dirette come gli assi su cui sono rispettivamente vincolati.



Essendo

$$\overrightarrow{OP_1} = \ell\cos\theta\hat{\imath}_1, \qquad \overrightarrow{OP_2} = \ell\sin\theta\hat{\imath}_2,$$

con riferimento alla figura si trova

$$\overrightarrow{OC} = \ell\cos\theta\hat{\imath}_1 + \ell\sin\theta\hat{\imath}_2.$$

Sia quindi I_C il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per C ortogonale al piano. Esso si calcola ponendo

$$I_C = md^2(P_1, C) + 2md^2(P_2, C) = m\ell^2\cos^2\theta + 2m\ell^2\sin^2\theta = m\ell^2 + m\ell^2\sin^2\theta.$$

D Per eseguire questo calcolo si può osservare che, calcolando il momento di inerzia rispetto alla retta passante per l'asta stessa (e quindi per il centro di massa del sistema), questo è zero. Traslando quindi, grazie al teorema di Huygens–Steiner, il momento di inerzia sulla retta $\mathcal{R}$ data, abbiamo che $I_{\mathcal{R}} = 3md^2(G, \mathcal{R})$, dove $d(G, \mathcal{R})$ è la distanza tra il centro di massa e la retta $\mathcal{R}$, ovvero tra la retta $\mathcal{R}$ e l'asta. Questa si può calcolare tracciando la perpendicolare da O all'asta come in figura, ottenendo il segmento $\overline{OQ}$ come sopra e osservando che $d^2(O, Q) = \|\overrightarrow{OP_2}\|^2 \sin^2\theta = \ell^2 \cos^2\theta \sin^2\theta$, per cui

$$I_{\mathcal{R}} = 3m\ell^2 \sin^2\theta \cos^2\theta.$$