FOGLIO 7

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Momenti di inerzia.

Negli esercizi che seguono, si assuma dato un riferimento cartesiano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$.

Esercizio svolto 7.1 (Anello omogeneo) — È dato un anello di centro O, raggio R e densità lineare uniforme λ, parametrizzato come una curva che giace nel piano generato da $\hat{\imath}_1$ e $\hat{\imath}_2$

$$\vec{\gamma}(u) = R\cos u\,\hat{\imath}_1 + R\sin u\,\hat{\imath}_2, \qquad u \in [0, 2\pi].$$

Se $\vec{I}_O$ è il tensore d'inerzia rispetto ad O, si calcoli

$$I_{\mathcal{Z}} \coloneqq \langle \hat{\imath}_3, \vec{I}_O(\hat{\imath}_3)\rangle, \qquad I_{\mathcal{X}} \coloneqq \langle \hat{\imath}_1, \vec{I}_O(\hat{\imath}_1)\rangle.$$

Soluzione. — Abbiamo

$$I_{\mathcal{Z}} \coloneqq \langle \hat{\imath}_3, \vec{I}_O(\hat{\imath}_3)\rangle = \lambda \int_\gamma (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\,\mathrm{d}\,s = \lambda \int_0^{2\pi} R^3\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\lambda R^3.$$

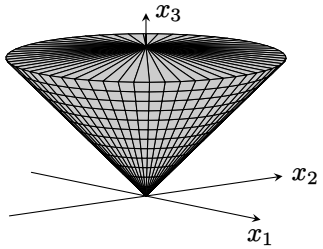
Il momento rispetto ad un asse complanare all'anello e passante per il suo centro, per esempio all'asse $\mathcal{X}$ di direzione $\hat{\imath}_1$ e passante per l'origine, è

$$I_{\mathcal{X}} \coloneqq \langle \hat{\imath}_1, \vec{I}_O(\hat{\imath}_1)\rangle = \lambda \int_\gamma (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)\,\mathrm{d}\,s = \lambda \int_0^{2\pi} R^3 \sin^2 t\,\mathrm{d}\,t = \pi\lambda R^3.$$

Esercizio svolto 7.2 (Cono omogeneo) — Un cono omogeneo di massa m ha raggio di base R e altezza h, ed è parametrizzato come segue:

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \hat{\imath}_k \colon 0 \le x_1^2 + x_2^2 \le \frac{R^2}{h^2} x_3^2, \quad 0 \le x_3 \le h \right\}, \qquad R > 0, \quad h > 0.$$

Si calcoli la rappresentazione di $\vec{I}_O$ nella base del riferimento dato.



Soluzione. — Sia la densità volumetrica $\rho(\vec{x}) = \frac{3m}{\pi h R^2}$ uniforme. Calcoliamo ora la matrice d'inerzia rispetto all'origine.

$$I_{O,11} = \frac{3m}{\pi h R^2} \int_{\mathcal{V}} (x_2^2 + x_3^2)\mathrm{d}\mathbf{x} = I_{O,22} = \left(\frac{3}{5}h^2 + \frac{3}{20}R^2\right)m, \qquad I_{O,33} = \frac{3m}{\pi h R^2} \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2)\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{3}{10}mR^2.$$

D'altra parte, per ragioni di simmetria, per $i \neq j$

$$I_{O,ij} = -\frac{3m}{\pi h R^2} \int_{\mathcal{V}} x_i x_j\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} = 0.$$

La matrice d'inerzia è quindi già in forma diagonale, nella forma

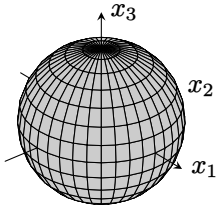
$$\mathbf{I}_O = \frac{3m}{20}\begin{pmatrix} 4h^2+R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4h^2+R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}.$$

Gli assi cartesiani sono dunque assi principali d'inerzia, e in particolare i due assi associati ai due versori $\hat{\imath}_1$ e $\hat{\imath}_2$ corrispondono a due autovalori uguali. In effetti, per via della simmetria rotazionale, *ogni coppia di assi ortogonali nel piano generato da $\hat{\imath}_1$ e $\hat{\imath}_2$ passante per O è una coppia di assi principali.*

Esercizio svolto 7.3 (Palla omogenea) — È data una palla omogenea di raggio $R > 0$ e massa m parametrizzata come segue:

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{x} = \sum_{k=1}^{3} x_k \hat{\imath}_k : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \right\}.$$

Si trovi la matrice di inerzia relativa all'origine rispetto agli assi del riferimento dato.



Soluzione parziale. — Sia la sua densità volumetrica $\rho(\vec{x}) = \frac{3m}{4\pi R^3}$ uniforme, in modo che la massa del corpo sia pari a $m > 0$. È facile vedere che

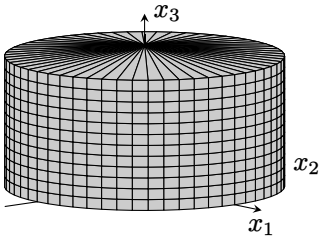
$$I_{O,11} = I_{O,22} = I_{O,33} = \frac{2}{5} m R^2.$$

Viceversa, $I_{ij} = 0$ quando $i \neq j$, sicché $\mathbf{I}_O = \frac{2}{5} m R^2 \mathbf{I}_3$. In effetti, come intuibile, ogni terna di assi cartesiani con origine nel centro della palla è una terna di assi principali d'inerzia.

Esercizio svolto 7.4 (Cilindro omogeneo) — Consideriamo un cilindro di massa m e densità omogenea, e calcoliamone il momento d'inerzia rispetto all'asse $\mathcal{Z}$. Assumiamo che il cilindro abbia raggio di base R e altezza h, e sia parametrizzato come

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{x} = \sum_{k=1}^{3} x_k \hat{\imath}_k : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, \quad 0 \leq x_3 \leq h \right\}.$$

Si calcoli $I_{\mathcal{Z}} \coloneqq \langle \hat{\imath}_3, \vec{I}_O(\hat{\imath}_3) \rangle$.

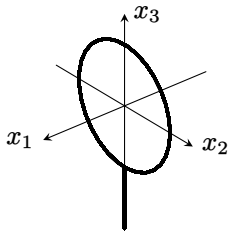


Soluzione. — Detta la densità uniforme $\rho(\vec{x}) \equiv \rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$, il momento d'inerzia rispetto all'asse $\mathcal{Z}$ di direzione $\hat{\imath}_3$ si calcola come

$$I_{\mathcal{Z}} = \rho \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \tfrac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 \, \mathrm{d}r = \tfrac{1}{2} m R^2.$$

Come si vede, il momento d'inerzia *non* dipende da h ma solo dalla massa e dal raggio del cilindro.

Esercizio svolto 7.5 (Racchetta) — Consideriamo un modello che rappresenta una racchetta da tennis, costituita da una circonferenza di raggio R centrata in O che giace nel piano generato da $\hat{\imath}_2$ e $\hat{\imath}_3$ passante per l'origine, e un manico di lunghezza R che va dal punto A, in posizione $\vec{x}_A = -R\hat{\imath}_3$, al punto B, in posizione $\vec{x}_B = -2R\hat{\imath}_3$, come nella seguente figura:

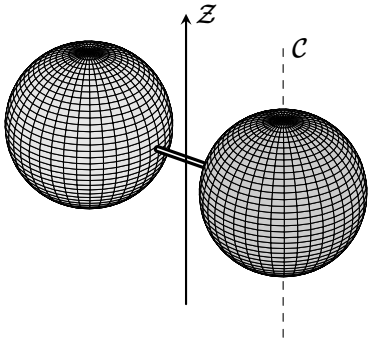


La racchetta ha densità lineare λ. Si calcoli il momento d'inerzia della racchetta rispetto alla retta $\mathcal{R}$ ortogonale ad essa e passante per B.

Soluzione. — Abbiamo già calcolato il momento d'inerzia di un anello di densità lineare λ e raggio R, ovvero massa $2\pi\lambda R$, rispetto ad un asse ortogonale passante per il suo centro, trovandolo pari a $2\pi\lambda R^3$. Il momento d'inerzia di un'asta di lunghezza ℓ e densità lineare λ, ovvero massa $\lambda\ell$, rispetto ad un asse ortogonale passante per il suo punto medio è $\frac{1}{12}\lambda\ell^3$. Dobbiamo così solo "traslare" questi due momenti in un asse passante per B utilizzando il teorema di Huygens–Steiner, osservando che i risultati noti fanno in entrambi i casi riferimento ad assi passanti per il centro di massa. Il momento cercato è quindi

$$I_{\mathcal{R}} = \left(2\pi\lambda R^3 + 2\pi\lambda R(2R)^2\right) + \left(\frac{\lambda R^3}{12} + \lambda R\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{3} + 10\pi\right)\lambda R^3.$$

Esercizio svolto 7.6 (Sistema di sfere) — Consideriamo un sistema costituito da due sfere di massa m ed m', ciascuna di raggio R e centri rispettivamente C e C' a distanza $2\ell > 2R$ tra loro. Sia O sul segmento $\overline{CC'}$, a distanza $a \in [R, 2\ell - R]$ da C, e sia $\hat{\imath}_3$ ortogonale a $\overrightarrow{CC'}$. Calcoliamo il momento d'inerzia $I_{\mathcal{Z}} = \langle \hat{\imath}_3, \vec{I}_O(\hat{\imath}_3)\rangle$ del sistema. Per quale valore di a il valore di $I_{\mathcal{Z}}$ è minimo?



Soluzione. — Sappiamo come calcolare, per ciascuna sfera, il momento d'inerzia rispetto alla retta $\mathcal{C}$ parallela a $\mathcal{Z}$ e passante per il centro della sfera stessa. Per esempio, considerando la sfera centrata in C, si ha $I_{\mathcal{C}} = \frac{2}{5}mR^2$. Per traslare questo contributo rispetto all'asse $\mathcal{Z}$ possiamo utilizzare il teorema di Huygens–Steiner, scrivendo

$$I_{\mathcal{Z}}^{C} = I_{\mathcal{C}} + ma^2 = m\left(\tfrac{2}{5}R^2 + a^2\right).$$

Possiamo ripetere lo stesso argomento per la sfera in C', ottenendo

$$I_{\mathcal{Z}}^{C'} = I_{\mathcal{C}'} + m'(2\ell - a)^2 = m'\left(\tfrac{2}{5}R^2 + (2\ell - a)^2\right).$$

Il contributo totale sarà

$$I_{\mathcal{Z}} = I_{\mathcal{Z}}^{C} + I_{\mathcal{Z}}^{C'} = \tfrac{2}{5}(m+m')R^2 + ma^2 + m'(2\ell - a)^2.$$

L'espressione è quadratica convessa in a. Il valore minimo rispetto ad a può essere ottenuto cercando prima di tutto i punti stazionari,

$$\tfrac{\mathrm{d}\, I_{\mathcal{Z}}}{\mathrm{d}\, a} = 2ma - 2m'(2\ell - a) = 0 \Rightarrow a = \tfrac{2m'}{m+m'}\ell.$$

Essendo $\frac{\mathrm{d}^2 I_{\mathcal{Z}}}{\mathrm{d}\, a^2} = 2(m+m') > 0$, il valore trovato è effettivamente il valore per cui l'espressione di $I_{\mathcal{Z}}$ è minima. Si osservi però che a è essa stessa vincolata, per cui il valore $a_\star$ per cui $I_{\mathcal{Z}}$ è minimo è dato da

$$a_\star = \begin{cases} R & \text{se } \frac{2m'}{m+m'}\ell \le R, \\ 2\ell - R & \text{se } \frac{2m'}{m+m'}\ell \ge 2\ell - R, \\ \frac{2m'}{m+m'}\ell & \text{altrimenti.} \end{cases}$$