FOGLIO 6

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA

ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Moto unidimensionale e piccole oscillazioni

Esercizio svolto 6.1 — Si consideri un punto materiale di massa unitaria, individuato dalla coordinata $x \in \mathbb{R}$, è soggetto al seguente potenziale:

$$V(x) = \sin^2 x + \lambda \sin x,$$

dove $\lambda \geq 0$ è un parametro reale.

(1) Si identifichino le configurazioni di equilibrio stabile ed instabile al variare del parametro λ, assumendo $\lambda \neq 2$.
(2) Si rappresenti (qualitativamente) il diagramma delle fasi associato al problema per $\lambda \in \{0, 1/2\}$, specificando le equazioni delle separatrici.

SOLUZIONE —

(1) Essendo il potenziale infinitamente differenziabile con continuità possiamo cercare i punti di equilibrio per mezzo della condizione

$$V'(x) = 2 \sin x \cos x + \lambda \cos x = \cos x (2 \sin x + \lambda) = 0.$$

Questa equazione ammette sempre come soluzione

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, se e solo se $\lambda < 2$, esistono le soluzioni

$$\bar{x}_k = -\arcsin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2k\pi, \quad \hat{x}_k = \pi + \arcsin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La stabilità può essere studiata calcolando

$$V''(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \lambda \sin x = 2 - 4\sin^2 x - \lambda \sin x.$$

Abbiamo che

$$V''(x_k) = \begin{cases} -2 - \lambda & \text{se } k \text{ è pari} \\ -2 + \lambda & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

per cui x_k è sempre punto di equilibrio instabile per k pari, mentre è punto di equilibrio stabile se e solo se $\lambda > 2$ per k dispari. Inoltre $V''(\bar{x}_k) = V''(\hat{x}_k) = 2 - \frac{\lambda^2}{2}$ per cui i punti di equilibrio $\bar{x}_k$ e $\hat{x}_k$, quando esistono, sono di equilibrio stabile per $\lambda < 2$.

(2) Sulla base dell'analisi precedente, per $\lambda = 0$ i punti di equilibrio instabile sono $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, valori per cui $V(x_k) = 1$, per cui la separatrice è data dall'equazione

$$y = \pm\sqrt{2 - 2\sin^2(x)} = \pm\sqrt{2}|\cos(x)|.$$

Viceversa, i punti $\bar{x}_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono di equilibrio stabile. Per questi valori $V(\bar{x}_k) = 0$. Detta E l'energia meccanica, per $E < 0$ il moto non è ammesso; per $E = 0$ il moto è stazionario nei minimi del potenziale; per $E \in (0, 1)$ il moto è limitato tra due punti di inversione; per $E = 1$ otteniamo la separatrice sopra; per $E > 1$ il moto è illimitato. Il diagramma di fase è rappresentato in Fig. 1. Per $\lambda = 1/2$ i punti di equilibrio instabile sono nuovamente x_k come sopra, ma corrispondenti a due diversi valori di energia. Per k pari, $V(x_k) = 3/2$, per k dispari $V(x_k) = 1/2$. I punti $\bar{x}_k = -\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$ e $\hat{x}_k = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono di equilibrio stabile e corrispondono a valori minimi del potenziale $V(\bar{x}_k) = V(\hat{x}_k) = -\frac{1}{16}$. Abbiamo così che per $E < -\frac{1}{16}$ il moto non è ammesso; per $E = -1/16$ il moto è stazionario nei minimi del potenziale; per $E \in (-1/16, 1/2)$ il moto è limitato tra punti di inversione; per $E = 1/2$ abbiamo una prima famiglia di separatrici, di equazione

$$y = \pm\sqrt{1 - 2\sin^2(x) - \sin(x)}$$

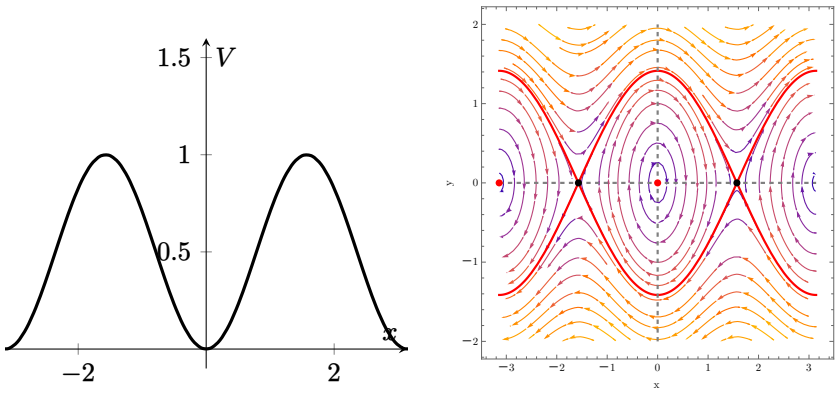


FIGURA 1. Potenziale e diagramma di fase per l'Esercizio 6.1 per $\lambda = 0$.

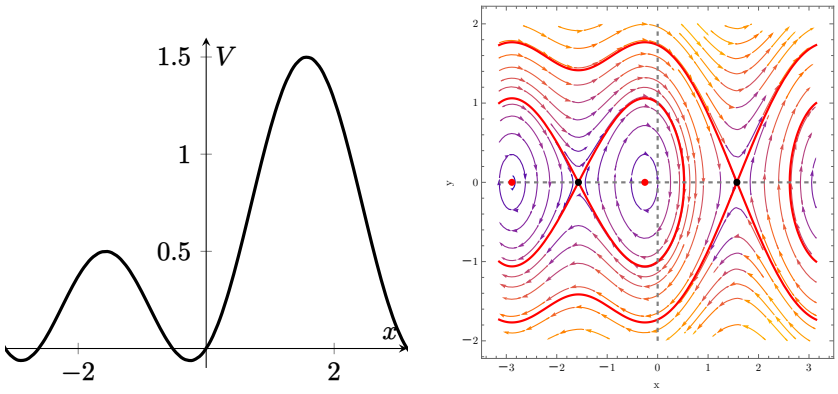


FIGURA 2. Potenziale e diagramma di fase per l'Esercizio 6.1 per $\lambda = 1/2$.

sugli intervalli in cui l'argomento della radice è non negativo; per $E \in (1/2, 3/2)$ abbiamo nuovamente moti limitati tra punti di inversione; per $E = 3/2$ abbiamo una nuova separatrice data da

$$y = \pm\sqrt{3 - 2\sin^2(x) - \sin(x)};$$

per $E > 3/2$ il moto è illimitato. Il diagramma di fase è rappresentato nella figura seguente.

Esercizio svolto 6.2 — Un punto materiale di massa unitaria si muove lungo una guida liscia in $\mathbb{R}^3$ individuata da

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} s - \lambda \arctan s \\ \ln(1 + s^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

e rappresentata in Fig. 3. Qui $\lambda > 0$ è un parametro da determinarsi. La curva è l'involuta della catenaria.

Il punto è soggetto ad una unica forza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, dipendente dalla sua posizione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\intercal$, data da

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{x_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\intercal .$$

(1) Imponendo che la parametrizzazione della guida sia naturale, si trovi il valore da assegnare a λ. Si mostri quindi che il moto del punto lungo la guida può essere descritto (a meno di costanti additive arbitrarie) dal potenziale effettivo

$$V(s) = s - s^2 - \frac{s^3}{3}.$$

La forza $\mathbf{F}$ è conservativa? Si giustifichi la risposta.

(2) Si esegua uno studio qualitativo del moto del punto materiale sotto l'azione $V(s)$, tracciando delle opportune traiettorie nel piano delle fasi e individuando le eventuali separatrici.

(3) Si scriva la soluzione delle equazioni del moto nella vicinanza del punto di equilibrio stabile in approssimazione di piccole oscillazioni, assumendo $s(0) = s_0$ e $\dot{s}(0) = 0$ per $t = 0$. Qual è il periodo del moto?

SOLUZIONE —

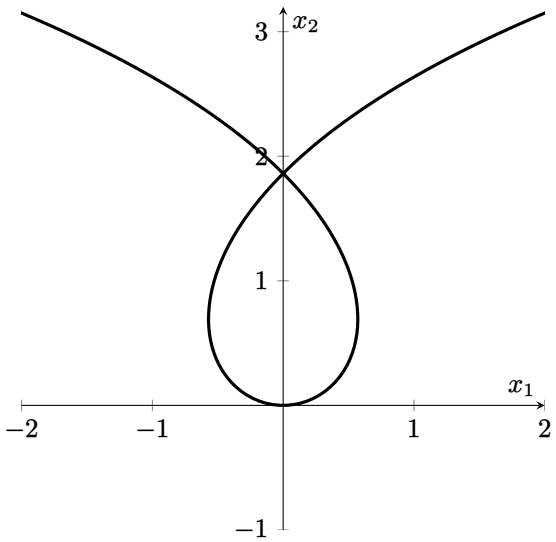


FIGURA 3. Guida dell'Esercizio 6.2.

(1) Una parametrizzazione naturale di una curva regolare richiede che $\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\|^2 = 1$, ovvero

$$\left(1 - \frac{\lambda}{1+s^2}\right)^2 + \left(\frac{2s}{1+s^2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(1+s^2)^2 + \lambda^2 - 2\lambda(1+s^2) + 4s^2}{(1+s^2)^2} = 1$$

ovvero deve valere $\lambda^2 - 2\lambda(1+s^2) + 4s^2 = 0$, da cui

$$\lambda = \frac{2(1+s^2) \pm 2\sqrt{(1+s^2)^2 - 4s^2}}{2} = (1+s^2) \pm |1-s^2|$$

che include la soluzione costante (unica accettabile, dato che λ non dipende da s) $\lambda = 2$ sia che $s^2 \leq 1$ sia che $s^2 > 1$. La forza generalizzata si ottiene quindi calcolando $\mathbf{F}$ lungo la curva e proiettandola sullo spazio tangente associato, ovvero

$$f(s) = \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(s)), \boldsymbol{\gamma}'(s) \rangle = \mathrm{e}^{\ln(1+s^2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{1+s^2} \\ \frac{2s}{1+s^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1+s^2)\left(1 - \frac{2}{1+s^2} + \frac{2s}{1+s^2}\right) = s^2 + 2s - 1.$$

Questa può essere associata ad un potenziale V tale che $f(s) = -V'(s)$,

$$V(s) = -\int_0^s f(x)\,\mathrm{d}\,x = s - s^2 - \frac{s^3}{3}.$$

La forza $\mathbf{F}$ d'altra parte non è conservativa: essendo il suo dominio semplicemente connesso ($\mathbb{R}^3$, se per assurdo lo fosse, sarebbe di conseguenza irrotazionale, e quindi per esempio $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$, ma questo produce $0 = \mathrm{e}^{x_2}$ che non è mai verificato.

(2) Occorre eseguire uno studio qualitativo di un moto unidimensionale nel potenziale

$$V(s) = s - s^2 - \frac{s^3}{3}.$$

Osserviamo che $\lim_{s\to-\infty} V(s) = -\lim_{s\to+\infty} V(s) = +\infty$. Inoltre $V'(s) = 0$ per $s = s_\pm = -1 \pm \sqrt{2}$, di modo che $V'(s) < 0$ per $s \notin [s_-, s_+]$ e $V'(s) > 0$ per $s \in (s_-, s_+)$. Di conseguenza s_- è un minimo (equilibrio stabile) mentre s_+ è un massimo (equilibrio instabile). Abbiamo così che

$E < V(s_-)$**:** Moto non limitato tra un certo $a > s_+$ e $+\infty$.

$E = V(s_-)$**:** Equilibrio in s_-, oppure moto non limitato tra $a > s_+$, punto di inversione, e $+\infty$.

$E \in (V(s_-), V(s_+))$**:** Tre punti di inversione a, b, c, con $a < s_- < b < s_+ < c$; le orbite sono limitate e periodiche in $[a, b]$ o illimitate su $[c, +\infty)$.

$E = V(s_+)$**:** Separatrice, individuata nel piano delle fasi dall'equazione

$$\dot{s} = \pm\sqrt{2(V(s_+) - V(s))}.$$

$E > V(s_+)$**:** Orbite illimitate con singolo punto di inversione nella direzione radiale $a < s_-$.

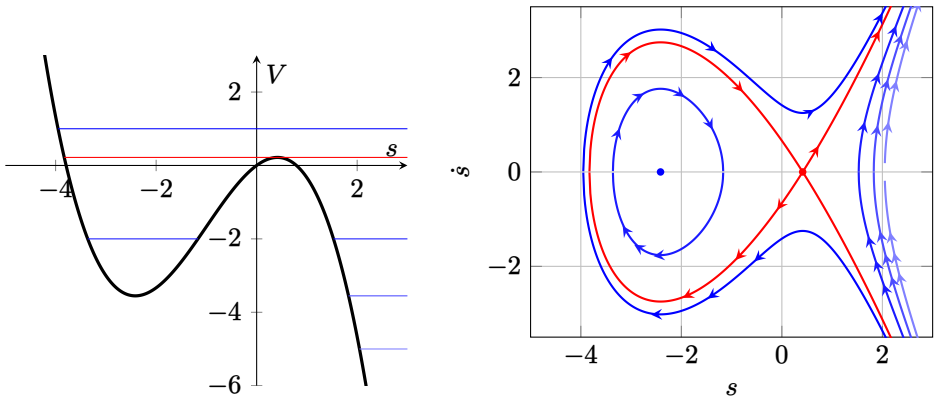


FIGURA 4. Potenziale e diagramma di fase per l'Esercizio 6.2.

(3) Essendo s_- un punto di equilibrio stabile, e $V''(s_-) = 2\sqrt{2}$, l'equazione del moto in approssimazione di piccole oscillazioni è

$$\ddot{s} = -V''(s_-)(s - s_-) \Leftrightarrow \ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0,$$

dove $\xi := s - s_-$ e $\omega^2 := V''(s_-) = 2\sqrt{2}$, per cui

$$s = s_- + (s_0 - s_-)\cos(\omega t).$$

Il periodo τ è dato da

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{V''(s_-)}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}}\pi = \sqrt[4]{2}\pi.$$

Esercizio svolto 6.3 — Un punto materiale di massa unitaria si muove sotto l'azione del potenziale

$$V(x) = \frac{\ell^2}{2x^2} + \frac{3x^2}{2} - \frac{\alpha x^6}{6}$$

per $x > 0$, dove $\alpha \geq 0$ e $\ell > 0$ sono due parametri.

(1) Per quali valori di ℓ ed α sono ammesse configurazioni di equilibrio? Sotto che condizioni esse sono stabili?

(2) Sia $\alpha = 1$. Si studi qualitativamente il moto del punto materiale per $\ell \in (0, 3/2)$, tracciando le traiettorie del sistema nel piano $(x, \dot{x})$ al variare dell'energia meccanica E.

SOLUZIONE —

(1) Cerchiamo i punti stazionari del potenziale

$$V'(x) = -\frac{\ell^2}{x^3} + 3x - \alpha x^5 = 0 \Leftrightarrow \alpha u^2 - 3u + \ell^2 = 0$$

dove abbiamo posto $u = x^4 > 0$. La stabilità verrà studiata considerando il segno di

$$V''(x) = \frac{3\ell^2}{x^4} + 3 - 5\alpha x^4.$$

Valutiamo due casi:

$\alpha > 0$**:** L'equazione produce

$$u_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\alpha\ell^2}}{2\alpha}$$

Le due soluzioni sono reali se $\alpha\ell^2 \leq 9/4$. Sotto queste ipotesi, entrambe le soluzioni sono accettabili, essendo $3 \pm \sqrt{9 - 4\alpha\ell^2} > 0$ per cui, per $\alpha > 0$ e $0 < \alpha\ell^2 < 9/4$ otteniamo due punti di equilibrio,

$$x_\pm = \sqrt[4]{\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\alpha\ell^2}}{2\alpha}}.$$

Abbiamo

$$V''(x_\pm) = \mp 4\sqrt{9 - 4\ell^2\alpha}$$

e dunque x_+ è instabile, mentre x_- è stabile. Si ha invece un punto di equilibrio in $x_0 = \sqrt[4]{\frac{3}{2\alpha}}$ per $9 = 4\alpha\ell^2$. In questo caso $V''(x_0) = 0$. Tuttavia poiché $V'(x) < 0$ per ogni $x \neq x_0$ positivo, il punto non è di minimo e corrisponde quindi ad una configurazione instabile.

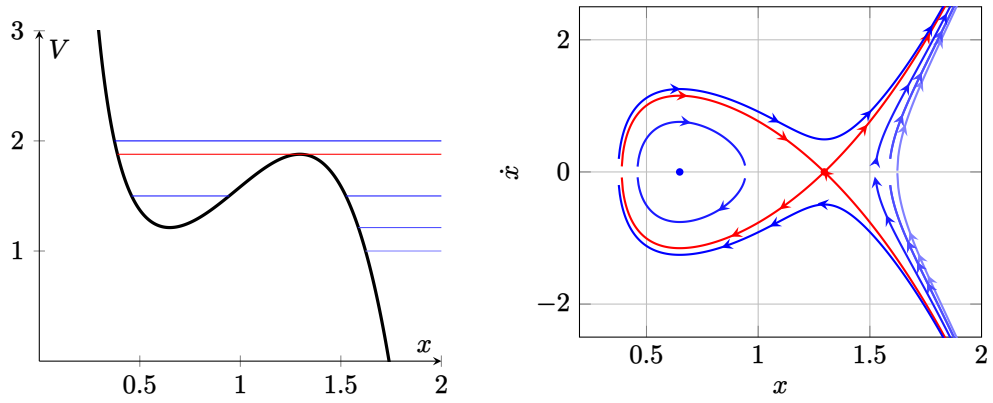


FIGURA 5. Potenziale e diagramma di fase per l'Esercizio 6.3.

$\alpha = 0$**:** Se $\alpha = 0$, allora l'equazione produce un'unica soluzione accettabile,

$$x^4 = u = \frac{\ell^2}{3} \Rightarrow x_0 = \sqrt[4]{\frac{\ell^2}{3}}.$$

Abbiamo che $V''(x_0) = 12 > 0$, ovvero la configurazione è stabile.

(2) Occorre eseguire uno studio qualitativo di un moto unidimensionale nel potenziale dato. Osserviamo che $\lim_{x\to 0} V(x) = -\lim_{x\to\infty} V(x) = +\infty$. Poiché $\alpha > 0$ e $\alpha\ell^2 = \ell^2 \leq 9/4$, come abbiamo visto prima esistono due punti stazionari in $x_+ > x_-$, rispettivamente di massimo e minimo per il potenziale. Abbiamo così che

$E < V_{\text{eff}}(x_-)$**:** Moto non limitato tra $a > x_+$ e $+\infty$.

$E = V_{\text{eff}}(x_-)$**:** Equilibrio stabile in x_-, oppure moto non limitato tra $a > x_+$, punto di inversione, e $+\infty$.

$E \in (V_{\text{eff}}(x_-), V_{\text{eff}}(x_+))$**:** Tre punti di inversione a, b, c, con $a < x_- < b < x_+ < c$; il moto è limitato e periodico in $[a, b]$ o illimitato su $[c, +\infty)$.

$E = V_{\text{eff}}(x_+)$**:** Separatrice contenente la configurazione instabile.

$E > V_{\text{eff}}(x_+)$**:** Traiettorie illimitate con singolo punto di inversione $a < x_-$.

Esercizio svolto 6.4 — Un punto materiale di massa unitaria si muove su una guida liscia. La sua posizione è parametrizzata dall'ascissa curvilinea $s \in \mathbb{R}$ ed inoltre il moto è indotto dal potenziale

$$V(s) = \frac{s^n}{n}\left(1 - \frac{s^2}{2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sia $\eta := \sqrt{\frac{2n}{2+n}}$.

A1 Si calcolino i punti di equilibrio in funzione di η, e, ove possibile, i periodi delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabile al variare di n.

A2 Si assuma n pari. Si esegua uno studio qualitativo del moto a mezzo del piano delle fasi, specificando per quale valore di E si ottengono eventuali separatrici.

A3 Si consideri ora $n > 1$ dispari. Si determini l'intervallo di valori dell'energia meccanica E compatibile con traiettorie limitate. Le traiettorie limitate per valori di E nell'interno di tale intervallo di energia sono sempre periodiche?

SOLUZIONE —

A1 Imponiamo

$$V'(s) = s^{n-1}\left(1 - \frac{2+n}{2n}s^2\right) = s^{n-1}\left(1 - \frac{s^2}{\eta^2}\right) = 0$$

Per tutti i valori di $n \in \mathbb{N}$, esistono due punti di equilibrio,

$$s_\pm = \pm\eta$$

mentre, per $n > 1$, si ha anche equilibrio in $s = s_0 = 0$. Calcoliamo la derivata seconda:

$$V''(s) = (n-1)s^{n-2} - \frac{n+1}{\eta^2}s^n.$$

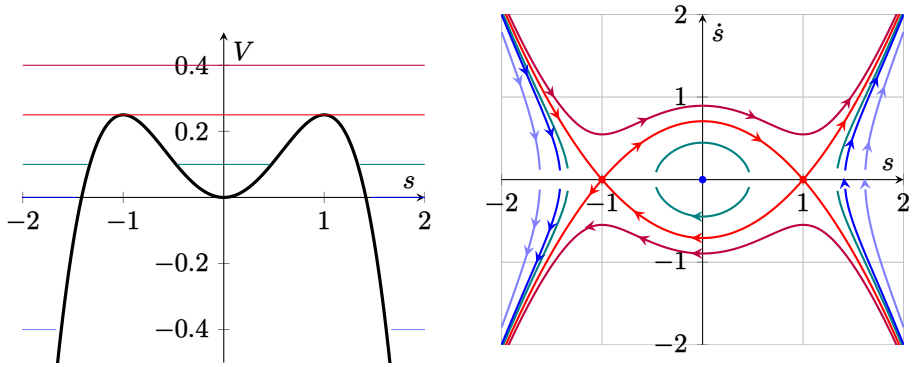


FIGURA 6. Potenziale e diagramma di fase per l'Esercizio 6.4 per $n = 2$.

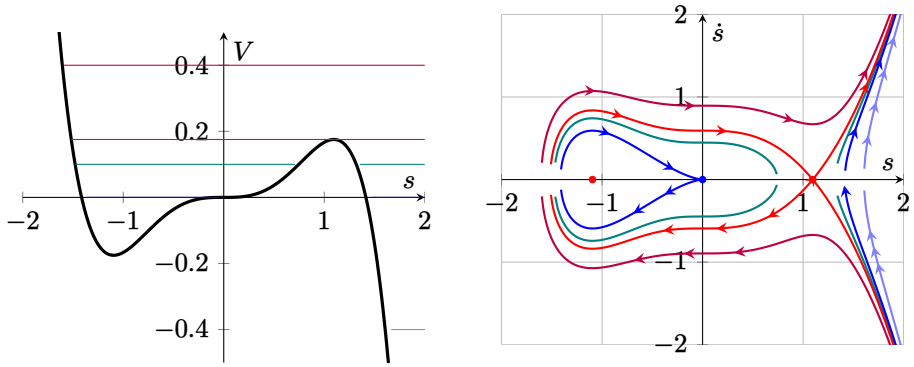


FIGURA 7. Potenziale e diagramma di fase per l'Esercizio 6.4 per $n = 3$ (non richiesto).

Abbiamo $V''(s_0) = 0$ per $n > 2$ mentre $V''(s_0) = 1$ per $n = 2$ (per $n = 1$, s_0 non è di equilibrio). Possiamo applicare l'approssimazione di piccole oscillazioni per studiare il moto attorno a s_0 solo per $n = 2$. In tal caso il periodo τ è $\tau = 2\pi$. Per i restanti punti di equilibrio,

$$V''(s_\pm) = s_\pm^n \left(\frac{n-1}{s_\pm^2} - \frac{n+1}{\eta^2} \right) = (\pm 1)^n \eta^n \left(\frac{n-1}{\eta^2} - \frac{n+1}{\eta^2} \right) = -(\pm 1)^n 2\eta^{n-2}.$$

Si ha perciò che s_+ è sempre instabile essendo $V''(s_\pm) < 0$. Viceversa, s_- è stabile per n dispari, dato che in tal caso $V''(s_-) = 2\eta^{n-2} > 0$. Il periodo delle piccole oscillazioni τ associato a tale equilibrio è

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{V''(s_-)}} = \sqrt{2}\pi\eta^{1-\frac{n}{2}}.$$

A2 Per n pari, come visto sopra, V ha tre punti di equilibrio, $s_\pm$ ed s_0; si ha che $V(s_0) = 0$ mentre

$$V(s_\pm) = \frac{\eta^n}{n}\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) \equiv E_* > 0.$$

Abbiamo visto che $s_\pm$ sono di equilibrio instabile. Il punto s_0 è di equilibrio e di minimo isolato, quindi stabile, come si vede dallo studio del segno della derivata. Infine, $\lim_{s\to\pm\infty} V(s) = -\infty$. Abbiamo così i seguenti regimi al variare dell'energia meccanica:

- $E < V(s_0) = 0$**:** Traiettorie illimitate tra $-\infty$ ed $a < s_-$ o $b > s_+$ e $+\infty$, dove a e b sono punti di inversione ottenuti risolvendo l'equazione $E = V(s)$.
- $E = V(s_0) = 0$**:** Traiettorie illimitate tra $-\infty$ ed $a < s_-$ o $b > s_+$ e $+\infty$, dove a, b sono punti di inversione ottenuti risolvendo l'equazione $E = V(s)$, oppure equilibrio in s_0.
- $E \in (V(s_0), V(s_\pm))$**:** Traiettorie illimitate tra $-\infty$ ed $a < s_-$ o $b > s_+$ e $+\infty$, dove a e b sono punti di inversione, oppure traiettorie periodiche tra $a_- > s_-$ e $b_+ < s_+$. I valori a, b, a_-, b_+ sono ottenuti risolvendo $E = V(s)$.
- $E = V(s_\pm)$**:** Separatrice costituita da sei rami.
- $E > V(s_\pm)$**:** Moto non limitato su tutta la guida privo di punti di inversione.

Per una rappresentazione qualitativa si veda la figura.

A3 Per $n > 1$ dispari, s_- è un punto di minimo, s_+ di massimo e s_0 di sella. Poiché $\lim_{s\to\pm\infty} V(s) = \mp\infty$, E è compatibile con traiettorie limitate per

$$E \in [V(s_-), V(s_+)] = [-E_*, E_*], \qquad E_* = V(s_+) = \frac{\eta^n}{n}\left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right).$$

Il valore $E = 0$ è interno a questo intervallo e corrisponde ad un moto tra $s = -\sqrt{2}$ e $s = 0$. Tuttavia, detta $\Phi(s, E) = 2(E - V(s))$, per $n > 1$, s_0 è uno zero multiplo di $\Phi(s, 0)$, essendo $\Phi(0, 0) = \Phi'(0, 0) = -2V'(0) = 0$, e pertanto le traiettorie aventi s_0 come estremo vengono percorse in un tempo infinito, oppure corrispondono alla soluzione di equilibrio stessa $s(t) = 0$. Ogni altro valore di energia $E \in (-E_*, E_*)$ avviene tra punti di inversione e produce traiettorie limitate periodiche di periodo finito.

Esercizio svolto 6.5 — Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa m soggetto al potenziale

$$V(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e si individuino i punti di equilibrio stabile e instabile del moto. Si calcoli il periodo delle *piccole oscillazioni* attorno al punto di equilibrio stabile individuato.

SOLUZIONE — Essendo il potenziale C^∞ su $\mathbb{R}$, possiamo calcolare i punti critici ponendo

$$V'(x) = x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Possiamo studiarne la stabilità valutando la derivata seconda, ovvero, dal fatto che $V''(x) = 2x - 1$,

$$V''(x_0) = -1 < 0, \qquad V''(x_1) = 1 > 0$$

per cui x_0 è un punto di equilibrio instabile e corrisponde ad un massimo di V, mentre x_1 è un punto di equilibrio stabile e corrisponde ad un minimo di V. Introducendo $\xi \coloneqq x - x_1$, l'equazione del moto si scrive in approssimazione di piccole oscillazioni attorno a x_1 come

$$m\ddot{\xi} = -V''(x_1)\xi = -\xi$$

per cui il periodo del moto di piccole oscillazioni attorno a x_1 è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(x_1)}} = 2\pi\sqrt{m}.$$

Esercizio 6.6 — Individuare le posizioni di equilibrio stabile e il periodo delle piccole oscillazioni per un punto materiale di massa m in moto nel potenziale unidimensionale

$$V(x) = x(1 - x^2).$$

$x = -1/\sqrt{3},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\sqrt{3}}}$

Esercizio 6.7 — Individuare le posizioni di equilibrio stabile e il periodo delle piccole oscillazioni per un punto materiale di massa m in moto nel potenziale unidimensionale

$$V(x) = x^2(x^2 - 1).$$

$x = \pm 1/\sqrt{2},\ T = \pi\sqrt{m}$

Esercizio 6.8 — Individuare le posizioni di equilibrio stabile e il periodo delle piccole oscillazioni per un punto materiale di massa m in moto nel potenziale unidimensionale

$$V(x) = \cos x.$$

$x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ T = 2\pi\sqrt{m}$