FOGLIO 5

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA

ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Formalismo lagrangiano.

Esercizio 5.1 — Scrivere e risolvere le equazioni del moto di un sistema con lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 - 2 q_1 q_2$$

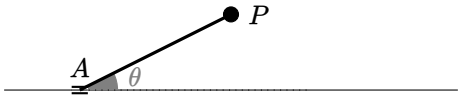
assumendo che al tempo $t = 0$ sia $\mathbf{q}(0) = (1, -1)^\intercal$. Si mostri che nello spazio (q_1, q_2) la traiettoria è una iperbole equilatera.

Esercizio 5.2 — Un sistema meccanico ad un grado di libertà $q \in \mathbb{R}$ soddisfa la seguente equazione del moto:

$$\ddot{q} = q^2 + \frac{1}{q^2 + 1} - 2q.$$

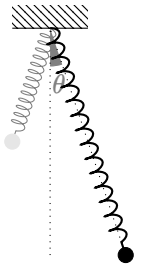
Scrivere una possibile lagrangiana per esso.

Esercizio 5.3 — Un punto materiale P di massa $m > 0$ è saldato ad una estremità di un'asta priva di massa di lunghezza ℓ, la cui seconda estremità, sia essa A può scorrere senza attrito lungo una guida orizzontale per mezzo di un carrello ideale di massa μ. L'asta può in particolare ruotare liberamente attorno al punto A mentre A trasla (eventualmente) lungo la guida, di modo che il moto dell'intero sistema avvenga in un piano verticale passante per la guida.



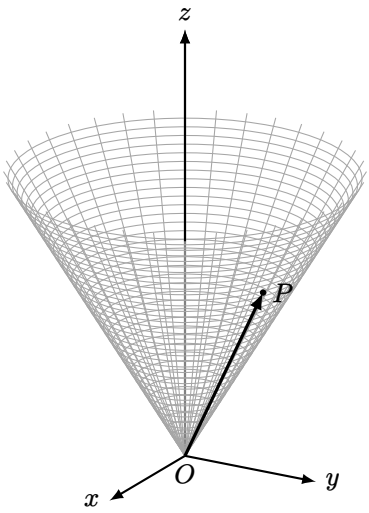
Si scrivano le equazioni di Lagrange per il sistema, tenendo conto del fatto che P è soggetto alla forza di gravità.

Esercizio 5.4 — Un pendolo di massa $m > 0$, vincolato a muoversi in un piano verticale, è costituito da una molla ideale di lunghezza a riposo ℓ e costante elastica $k > 0$ fissata in un punto di sospensione O.



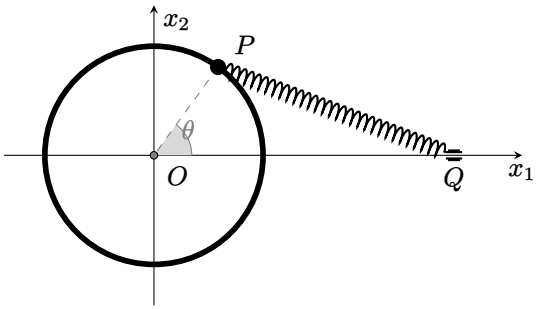
Detta $\ell + q$ la lunghezza della molla e θ l'angolo che essa forma con la verticale, si scrivano le equazioni di Eulero–Lagrange del sistema in termini di q e θ.

Esercizio 5.5 — Un punto materiale P di massa $m > 0$ si muove sulla superficie laterale di un cono circolare retto liscio, con vertice in O e asse di simmetria coincidente con l'asse verticale z, orientato verso l'alto. Si assuma che l'angolo tra l'asse del cono e una sua generatrice sia costante e pari a $\alpha \in (0, \pi/2$. Il punto è soggetto alla sola forza peso.



Si scriva la lagrangiana del sistema utilizzando come variabili lagrangiane la distanza r di P da O e l'angolo ϕ che la proiezione del vettore $\overrightarrow{OP}$ sul piano xy forma con l'asse x. Si scrivano le equazioni di Eulero–Lagrange associate, osservando che una di esse corrisponde ad un principio di conservazione.

Esercizio 5.6 — Un punto materiale P di massa $m = 1$ è vincolato a muoversi su una guida circolare liscia di raggio $r = 1$ che giace in un piano verticale. Esso è collegato, tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, ad un carrello di massa μ che scorre liberamente e senza attrito su un asse orizzontale, complanare alla guida e passante per il suo centro, come in figura.



Detta g accelerazione di gravità, si assuma di lavorare in opportune unità tali che $g = 1$. Denotando con q l'ascissa di Q, si scriva la lagrangiana del sistema. Si derivino corrispondenti equazioni di Eulero–Lagrange. Si mostri che, per $\mu = 0$, è possibile rimuovere la dipendenza da q nell'equazione dinamica per θ.

Esercizio svolto 5.7 (Pendolo sferico e metodo di Routh[1]) — Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una sfera liscia di raggio $r > 0$ sotto l'azione della gravità, di modo che le sue coordinate siano

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0,\pi], \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

(1) Si scrivano la lagrangiana $\mathcal{L}(\theta, \dot\theta, \dot\phi)$ associata e le corrispondenti equazioni di Eulero–Lagrange, mostrando in particolare che $\mathcal{L}$ *non* dipende esplicitamente da ϕ: si dice che la variabile ϕ è *ciclica*.

(2) Dopo aver mostrato che $\ell := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}$ è una quantità conservata, si scriva l'espressione dell'energia meccanica in termini di ℓ, θ e delle sue derivate temporali. In particolare, si espliciti la funzione f tale che $\dot\phi = f(\theta, \dot\theta, \ell)$.

(3) Si consideri ora la *lagrangiana ridotta* $\mathcal{L}_{\text{rid}}(\theta, \dot\theta) := \mathcal{L}(\theta, \dot\theta, f(\theta, \dot\theta, \ell))$, ottenuta sostituendo in $\mathcal{L}$ l'espressione di $\dot\phi$ in funzione di θ, $\dot\theta$ ed ℓ. Si mostri che le equazioni per θ ottenuta da questa lagrangiana *non* sono uguali a quelle ottenute da $\mathcal{L}$.

[1] Il metodo di Routh, introdotto da Edward J. Routh attorno al 1860, sostituisce nella lagrangiana la dipendenza di $\dot q_s$ con quella dal momento coniugato $p_s := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}$: la funzione $\mathcal{L}_{\text{R}}$ risultante viene detta *routhiana*. Come apparirà più evidente dallo studio della meccanica hamiltoniana, si tratta di un "metodo ibrido" tra quello di Lagrange e quello di Hamilton — argomento del corso del terzo anno — che può talvolta essere utile per semplificare le equazioni del moto rimuovendo le variabili cicliche.

(4) Si consideri ora la *lagrangiana di Routh*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{R}}(\theta, \dot\theta) \coloneqq \left[\mathcal{L}(\theta, \dot\theta, \dot\phi) - \dot\phi \ell\right] \Big|_{\dot\phi = f(\theta, \dot\theta, \ell)}$$

e si mostri che l'equazione di Eulero–Lagrange per θ è stavolta quella ottenibile da $\mathcal{L}$. Si noti inoltre che la lagrangiana descrive un sistema *effettivamente unidimensionale*, ovvero ha la forma $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}(\theta, \dot\theta) = T(\dot\theta) - V_{\mathrm{eff}}(\theta)$: qual è l'espressione di $V_{\mathrm{eff}}(\theta)$?

(5) Si dimostri in generalità il metodo di Routh. Sia $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ una lagrangiana con $\mathbf{q} = (q_a)_{a=1}^n$ indipendente da una certa variabile generalizzata q_s. Si supponga che la lagrangiana sia indipendente dalla coordinata q_s e che

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q_s^2} \neq 0.$$

Si mostri che, almeno localmente, l'equazione per il *momento generalizzato associato a* q_s

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_s}$$

può essere invertita rispetto a $\dot q_s$, scrivendo $\dot q_s = f(t, \mathbf{q}_{\not s}, \dot{\mathbf{q}}_{\not s}, p_s)$, e che p_s si conserva. Infine, si mostri che la lagrangiana ridotta

$$\mathcal{L}_{\mathrm{R}}(t, \mathbf{q}_{\not s}, \dot{\mathbf{q}}_{\not s}) = \left[\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot q_s p_s\right] \Big|_{\dot q_s = f(t, \mathbf{q}_{\not s}, \dot{\mathbf{q}}_{\not s}, p_s))}$$

produce le stesse equazioni di Eulero–Lagrange per le altre variabili lagrangiane.