FOGLIO 4

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Moto di punti materiali e campo gravitazionale

1. Potenziale gravitazionale

La *legge di gravitazione universale* nasce da una serie di osservazioni sperimentali sul moto dei corpi, e in particolare dei corpi celesti. Siano dati due punti materiali P e X_0 di massa m e M e in posizione $\vec{x}$ e $\vec{x}_0$ rispettivamente secondo un riferimento cartesiano ortonormale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$. Si osserva che X_0 esercita sul P una forza pari a

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^3}(\vec{x}-\vec{x}_0) \equiv -\frac{GmM}{\|\vec{r}\|^2}\hat{r}, \qquad \vec{r} \coloneqq \vec{x}-\vec{x}_0.$$

Nella formula precedente, la costante G è detta *costante di gravitazione universale*: se le masse sono misurate in chilogrammi, le distanze in metri e il tempo in secondi, essa è circa pari a $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$. Come vedremo, la forza quindi è *attrattiva*, ovvero tende ad avvicinare i corpi in questione. La forza è anche conservativa: infatti

$$\vec{F} = -\nabla V, \qquad V(\vec{x}) = -\frac{GmM}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}.$$

Dalla definizione data sopra, la forza gravitazionale è una *forza centrale*. Assumendo di avere, al posto del punto materiale X_0, un corpo esteso $\mathcal{B}$ con densità ρ e massa totale M, la formula precedente si scrive

$$\vec{F}_P = -Gm\int_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\vec{z})(\vec{x}-\vec{z})}{\|\vec{x}-\vec{z}\|^3}\,\mathrm{d}\,\vec{z} = Gm\nabla\int_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\vec{z})}{\|\vec{x}-\vec{z}\|}\,\mathrm{d}\,\vec{z} \equiv -\nabla V(\vec{x}), \qquad V(\vec{x}) \coloneqq -Gm\int_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\vec{z})}{\|\vec{x}-\vec{z}\|}\,\mathrm{d}\,\vec{z}$$

che mostra come la forza risulti anche in questo caso da un potenziale $V(\vec{x})$.

Esercizio svolto 1.1 (Forza di gravitazione universale) — Si calcoli il potenziale gravitazionale di una sfera omogenea di densità ρ e raggio R.
Soluzione — Supponiamo che la sfera $\mathcal{B}$ sia centrata nell'origine del riferimento cartesiano. Per simmetria, il centro della sfera è anche il centro di massa di $\mathcal{B}$. Scegliamo l'orientazione dei nostri assi in modo tale che la seconda massa m considerata, assunta puntiforme, sia in posizione $\vec{x} = x\hat{\imath}_3$. Il potenziale può essere calcolato usando le coordinate sferiche, scrivendo (a meno di costanti additive)

$$V(\vec{x}) = -Gm\rho\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos\theta}} = -2\pi Gm\rho\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos\theta}}.$$

Per procedere, eseguiamo ora un cambio di variabili introducendo, al posto della variabile θ una nuova variabile s tale che

$$s^2 = r^2 + x^2 - 2xr\cos\theta \Rightarrow 2s\,\mathrm{d}\,s = 2xr\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta,$$

per cui l'integrale nella variabile θ diventa

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\,\theta\frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2+x^2-2rx\cos\theta}} = \frac{1}{xr}\int_{|r-x|}^{r+x}\mathrm{d}\,s = \frac{r+x-|r-x|}{xr}.$$

Per integrare in r, dobbiamo distinguere tra il caso $x > R$ (la massa m è *fuori* dalla sfera $\mathcal{B}$) e il caso $0 < x \leq R$ (la massa m è *dentro* la sfera $\mathcal{B}$):

$$V(\vec{x}) = -2\pi \frac{Gm\rho}{x} \int_0^R r(r+x-|r-x|)\mathrm{d}r = \begin{cases} -\frac{GmM}{x} & \text{se } x > R, \\ -2\pi\rho Gm\left(R^2 - \frac{x^2}{3}\right) & \text{se } 0 < x \leq R. \end{cases}$$

Ciò vuol dire che la forza applicata su un punto lungo l'asse di direzione $\hat{\imath}_3$ punta verso il centro della sfera $\mathcal{B}$: basta infatti derivare per ottenere

$$\vec{F} = -\nabla V = \begin{cases} -\frac{GmM}{x^2}\hat{\imath}_3 & \text{se } x > R, \\ -\frac{GmM_x}{x^2}\hat{\imath}_3 & \text{se } 0 < x \leq R, \end{cases}$$

dove $M_x = \frac{4\pi}{3}\rho x^3$ è la massa entro una sfera di raggio x centrata nell'origine: questo fatto è molto interessante, perché significa che, se $0 < x \leq R$ (cioè se la massa m è dentro la sfera), la forza esercitata su di essa è dovuta al *solo contributo* della porzione di massa di $\mathcal{B}$ inclusa nella sfera di raggio x centrata in O.

Supponiamo che, in primissima approssimazione, la Terra sia una sfera di raggio R_T, con densità a simmetria sferica (di modo che il suo centro di massa corrisponda col centro geometrico della sfera) e massa M_T. Esattamente come nel caso di una sfera omogenea, anche in questo caso è possibile mostrare che la forza esercitata dalla Terra su un punto materiale di massa m a quota h sulla superficie terrestre è

$$\vec{F} = -\frac{GM_T m}{(R_T + h)^2}\hat{r},$$

dove $\hat{r}$ è il versore associato al vettore che, partendo dal centro della Terra, punta la posizione del corpo considerato. Assumendo ora $R_T \gg h$, ovvero che l'oggetto non sia a distanze molto grandi dalla superficie del pianeta, la formula precedente si può approssimare come

$$\vec{F} \simeq -\frac{GM_T m}{R_T^2}\hat{r} \equiv -mg\hat{r}, \qquad g \coloneqq \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

La quantità g, che abbiamo già incontrato, è detta *accelerazione di gravità* e si può considerare costante fintantoché $h \ll R_T$. Questa osservazione permette di semplificare molto lo studio della caduta dei gravi e in generale della gravità a distanze minime dalla superficie terrestre: in tale approssimazione, possiamo scrivere $\vec{F}_P = -\nabla\hat{V}$ con $\hat{V}(\vec{x}) = mg\langle\vec{x}, \hat{r}\rangle$, pertanto anche in questa approssimazione la forza rimane conservativa. Analizzeremo più in là l'effetto della forza gravitazionale in questa utile approssimazione.

Esercizio 4.2 — Un punto materiale P si muove con velocità $\vec{v}_P(t) = -\omega R\sin\omega t\,\hat{\imath}_1 + \omega R\cos\omega t\,\hat{\imath}_2 + h\hat{\imath}_3$ con $R, \omega, h > 0$. Determinare le equazioni del moto $\vec{x}_P(t)$ assumendo che $\vec{x}_P(0) = R\hat{\imath}_1$.

$\vec{x}_P(t) = R\cos\omega t\,\hat{\imath}_1 + R\sin\omega t\,\hat{\imath}_2 + ht\hat{\imath}_3$

Esercizio 4.3 — Un punto materiale P si muove con velocità $\vec{v}_P(t) = -3bt^2\,\hat{\imath}_1 + 2ct\,\hat{\imath}_2$ con $b, c > 0$. Determinare le equazioni del moto $\vec{x}_P(t)$ assumendo che $\vec{x}_P(0) = \vec{0}$.

$\vec{x}_P(t) = -bt^3\,\hat{\imath}_1 + ct^2\,\hat{\imath}_2$

Esercizio 4.4 — Un punto materiale P si muove con equazione del moto $\vec{x}_P(t) = R\sin\omega t\cos\omega t\,\hat{\imath}_1 + R\cos^2\omega t\,\hat{\imath}_2$, con $R > 0$ e $\omega \neq 0$. Determinare l'equazione della sua traiettoria.

$x_1^2 + \left(x_2 - \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$

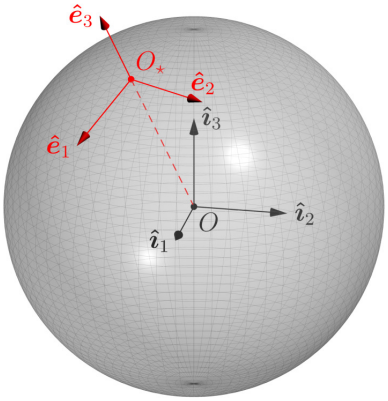
Esercizio 4.5 — Determinare le coordinate polari in funzione del tempo per un punto P sapendo che il rapporto tra accelerazione tangenziale e accelerazione centripeta si mantiene costantemente uguale a κ.

In coordinate polari, $r(t) = v_{r0}t + r_0$, $\phi(t) = \frac{1}{\kappa}\ln\left(1 + \frac{v_{r0}}{r_0}t\right) + \phi_0$ per opportune costanti.

Esercizio 4.6 — Un punto materiale P si muove con accelerazione $\vec{a}_P(t) = \ddot{\vec{x}}_P(t) = \alpha\vec{v}_P(t) \wedge \hat{\imath}_3$ con $\alpha \neq 0$. Determinare $\vec{x}_P(t)$ assumendo $\vec{x}_P(0) = \vec{0}$ e una generica velocità iniziale $\vec{v}_P(0) = v_0\hat{\imath}_1$.

$\vec{x}_P(t) = \frac{v_0\sin(\alpha t)}{\alpha}\hat{\imath}_1 + \frac{v_0(\cos(\alpha t) - 1)}{\alpha}\hat{\imath}_2$

Esercizio svolto 4.7 (Moto dei gravi) — In un intorno di un punto della superficie terrestre e su scale molto più piccole del raggio della Terra, possiamo trascurare la curvatura della superficie terrestre e introdurre un sistema di riferimento ortonormale $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ tale per cui il punto $O_\star$ appartiene alla superficie della Terra, e $\hat{e}_3 \equiv \hat{r}$ versore normale in $O_\star$ uscente dalla superficie della Terra, mentre $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ sono tangenti alla superficie terrestre:



Questo riferimento non è inerziale, ma, su scale spaziali e temporali molto piccole, può essere considerato *approssimativamente inerziale* assumendo il pianeta *immobile*. Come sappiamo, in prossimità di $O_\star$ possiamo approssimare la forza peso a cui è soggetto un generico corpo di massa m come $\vec{F} = -mg\hat{e}_3$. Se la forza peso è l'unica forza attiva sul corpo, l'evoluzione temporale in un certo intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ della posizione $\vec{x}$ di un punto materiale P di massa m è piuttosto semplice da derivare. Si risolva quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \\ \dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{v}_0 \\ m\ddot{\vec{x}} = -mg\hat{e}_3. \end{cases} \tag{1}$$

SOLUZIONE — Nel problema di Cauchy, $\vec{x}_0$ e $\vec{v}_0$ sono rispettivamente la posizione e la velocità del punto al tempo iniziale del nostro studio, t_0, assunte note. Dall'ultima equazione si vede che *la dipendenza dalla massa può essere rimossa*, e possiamo trovare la legge per $\vec{x}$ tramite successive integrazioni. In particolare

$$\int_{t_0}^{t} \ddot{\vec{x}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int_{t_0}^{t} g\hat{e}_3\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) - \dot{\vec{x}}(t_0) = -g(t-t_0)\hat{e}_3 \Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}_0 - g(t-t_0)\hat{e}_3,$$

e integrando ancora una volta si ottiene infine

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2\hat{e}_3.$$

Questa equazione in forma vettoriale si può scomporre nelle tre componenti che essa rappresenta, ovvero

$$x_1(t) = x_{0,1} + v_{0,1}(t-t_0), \qquad x_2(t) = x_{0,2} + v_{0,2}(t-t_0) \qquad x_3(t) = x_{0,3} + v_{0,3}(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2.$$

Ciò mostra che le componenti orizzontali del moto x_1 e x_2 evolvono di moto uniforme con velocità pari a quella iniziale. Viceversa, la terza componente ha un moto accelerato verso il basso per effetto della gravità.

L'espressione generale per il caso del moto di un grave può essere utilizzata per derivare alcuni fatti interessanti riguardo il moto di gravi e proiettili. Supponiamo per semplicità che $t_0 = 0$ e consideriamo due casi particolari.

Caduta di un grave: Supponiamo che il punto materiale parta da una certa altezza $h > 0$ dal suolo, in modo che $\vec{x}_0 = h\hat{e}_3$, e abbia velocità iniziale nulla, $\vec{v}_0 = \vec{0}$ (ovvero, viene lasciato cadere). Secondo la legge sopra, il suo moto sarà descritto dall'equazione

$$\vec{x}(t) = \left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{e}_3,$$

per cui raggiungerà il suolo (ovvero $x_3 = 0$) quando

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Come si vede, *assumendo che sul corpo agisca la sola forza gravitazionale* (ovvero ignorando, per esempio, la resistenza del mezzo in cui il corpo cade) il tempo di caduta non dipende dalla massa ma solo dall'accelerazione di gravità e dall'altezza.

Lancio di un proiettile: Supponiamo ora che il punto materiale inizi il suo moto dall'origine $O_\star$, ovvero $\vec{x}_0 = \vec{0}$, ma che venga lanciato con velocità $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\, \hat{e}_1 + v_0 \sin\alpha\, \hat{e}_3$, ovvero, con una velocità di modulo $v_0 > 0$ e un angolo rispetto al piano tangente alla superficie terrestre pari ad $\alpha \in (0, \pi/2)$. L'equazione generale è ancora valida e, applicata a queste speciali condizioni iniziali, assume la forma $\vec{x}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{e}_3$. Possiamo chiederci quando tale oggetto avrà nuovamente $x_3 = 0$, ovvero toccherà il suolo. Le equazioni si scrivono, in termini delle coordinate, come

$$x_1(t) = v_0 \cos\alpha\, t, \qquad x_2(t) = 0, \qquad x_3(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

da cui si trova che

$$x_3(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{e} \quad t = t_* = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}.$$

dove la prima soluzione è quanto a noi noto (il proiettile è al suolo all'inizio del moto), mentre il secondo è il *tempo di volo*. A tale tempo, il proiettile si troverà in posizione

$$\vec{x}(t_*) = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \hat{e}_1 = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \hat{e}_1,$$

ovvero avrà percorso una distanza $v_0^2 g^{-1} |\sin(2\alpha)|$, che è pari alla *gittata* del "cannone" utilizzato per il lancio, avendo richiesto che quota di partenza e arrivo siano le stesse. La formula mostra che, a parità di velocità di lancio v_0, un angolo $\alpha < \pi/4$ e un angolo $\alpha' = \pi/2 - \alpha$ corrispondono alla stessa gittata, mentre che la gittata massima si raggiunge per $\alpha = \pi/4$. Possiamo anche derivare la *traiettoria* del proiettile, scrivendo la quota $x_3(t)$ in funzione della distanza $x_1(t)$ percorsa lungo la direzione orizzontale $\hat{e}_1$, usando il fatto che, dalla prima equazione, si trova $t = \frac{x_1}{v_0 \cos\alpha}$ che sostituita nella seconda fornisce la quota in funzione dello spostamento orizzontale x_1,

$$x_3 = \tan\alpha\, x_1 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x_1^2.$$

Questa equazione descrive un arco di parabola che ha la sua quota massima a metà percorso, ovvero nel punto x_1 tale che

$$\frac{\mathrm{d}\, x_3}{\mathrm{d}\, x_1} = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha - \frac{g x_1}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x_1^{\max} = \frac{v_0^2 \tan\alpha \cos^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}.$$

In tale punto, la quota è

$$x_3^{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Anche assumendo che su un punto materiale in prossimità della superficie terrestre non agiscano altre forze, un osservatore solidale con la Terra osserverà una accelerazione debolmente dipendente dalla latitudine a cui si trova. Ciò è dovuto al fatto che un riferimento solidale con la Terra *non* è un sistema di riferimento inerziale per via di vari moti di rotazione e rivoluzione che la Terra compie e che abbiamo finora trascurato. Essendo non inerziale, infatti, in un riferimento solidale appaiono le su menzionate forze apparenti. Considereremo qui una prima correzione, dovuta all'effetto della *rotazione* terrestre.

Esercizio svolto 4.8 (Una correzione non-inerziale a g) — Si calcoli la correzione non-inerziale dovuta alla rotazione della Terra attorno ad un suo asse ignorando ogni altro moto terrestre.
SOLUZIONE — Indichiamo ancora una volta con $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ un riferimento che assumiamo inerziale, con origine nel centro della Terra e tale che $\vec{\omega} = \omega \hat{\imath}_3$. Introduciamo altresì un riferimento mobile solidale col moto della Terra, $O\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3$, con $\hat{b}_3 \equiv \hat{\imath}_3$, e che condivide quindi l'origine con il riferimento fisso, come in Fig. 1 tale per cui

$$\hat{b}_1 = \cos\phi\, \hat{e}_1 + \sin\phi\, \hat{e}_2, \qquad \hat{b}_2 = -\sin\phi\, \hat{e}_1 + \cos\phi\, \hat{e}_2.$$

Essendo il nuovo riferimento solidale, esso ruota insieme alla Terra in modo che $\dot{\phi} = \omega$, quantità costante. Immaginiamo ora di avere un punto materiale P di massa m sulla superficie, fermo nel sistema solidale con la Terra e con coordinate rispetto ad esso date da

$$\vec{x}_P^\star = R_T \sin\theta\, \hat{b}_1 + R_T \cos\theta\, \hat{b}_3.$$

Su tale corpo è attiva la forza peso, che nel riferimento solidale con la Terra si scrive

$$\vec{F} = -mg \sin\theta\, \hat{b}_1 - mg \cos\theta\, \hat{b}_3,$$

ma sono altresì attive in generale delle forze *apparenti*. Abbiamo anzitutto una *forza di trascinamento*, che in questo caso, essendo $\vec{\omega}$ con direzione costante, ha la forma di una forza centrifuga,

$$\vec{F}^\tau = m\omega^2(\vec{x}_P^\star - \langle \vec{x}_P^\star, \hat{\imath}_3\rangle \hat{\imath}_3) = m\omega^2(\vec{x}_P^\star - \langle \vec{x}_P^\star, \hat{b}_3\rangle \hat{b}_3) = m\omega^2 R_T \sin\theta\, \hat{b}_1.$$

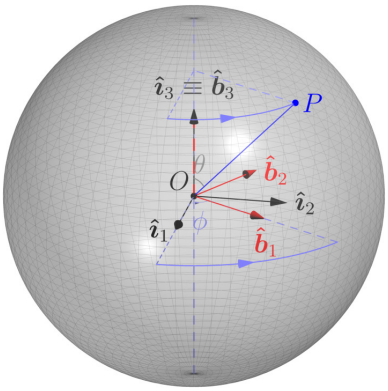


FIGURA 1. Riferimenti per il calcolo della correzione non-inerziale a g.

Sappiamo anche che, in generale, è presente una *forza di Coriolis*: tuttavia abbiamo assunto il corpo essere fermo nel sistema solidale con la Terra, per cui tale contributo, che è proporzionale alla velocità che il corpo ha nel sistema di riferimento mobile, è nullo. Nel sistema non inerziale che stiamo studiando, quindi, il punto materiale P è soggetto ad una forza attiva

$$\vec{F} + \vec{F}^{\tau} = m\left(\omega^2 R_T \sin\theta - g\sin\theta\right)\hat{b}_1 - mg\cos\theta\,\hat{b}_3.$$

In altre parole, nel riferimento della Terra il corpo è soggetto ad una accelerazione diversa in modulo da g e pari a

$$g_{\text{eff}} \coloneqq \frac{\|\vec{F} + \vec{F}^{\tau}\|}{m} = \sqrt{g^2\cos^2\theta + (g - R_T\omega^2)^2\sin^2\theta}.$$

Ne risulta che l'accelerazione percepita in un riferimento solidale con il moto terrestre ha in effetti un andamento che dipende dalla *latitudine* a cui il corpo si trova: in particolare, essendo $R_T\omega^2 < g$, ai poli ($\theta = 0$ o $\theta = \pi$), essa è massima e pari a $g_{\text{eff}} = g$, mentre all'equatore, dove $\theta = \pi/2$, l'accelerazione è minima e pari a $g_{\text{eff}} = g - R_T\omega^2$.