FOGLIO 3

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA

ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Calcolo del centro di massa; lavoro di una forza

Esercizio 3.1 — Sono dati un riferimento ortonormale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ e tre punti materiali P_1, P_2 e P_3. I punti sono tali che, per $k = 1, 2, 3$, $\overrightarrow{OP_k} = \hat{\imath}_k$ e la massa di P_k è $m_k = 2^{k-1}m$. Si calcoli la posizione del centro di massa.

$\overrightarrow{OG} = \frac{\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 + 4\hat{\imath}_3}{7}$

Esercizio 3.2 — In un riferimento ortonormale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ è dato un cilindro così descritto

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{x} = \sum_{k=1}^{3} x_k \hat{\imath}_k \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \quad 0 \leq x_3 \leq 1. \right\}$$

Tale cilindro ha densità di massa data da $\rho(\vec{x}) = \mathrm{e}^{-ax_3}$ con $a > 0$. Si calcoli la posizione del centro di massa.

$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{a}} \right) \hat{\imath}_3$

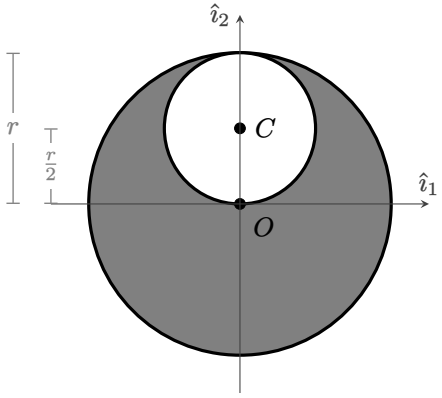
Esercizio 3.3 — In un riferimento ortonormale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ è dato un arco di circonferenza nel piano

$$\mathcal{A} = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \cos\theta\, \hat{\imath}_1 + \sin\theta\, \hat{\imath}_2,\ 0 < \theta < \Theta \}, \qquad \Theta \in (0, 2\pi],$$

di densità lineare uniforme. Si calcoli la posizione del centro di massa.

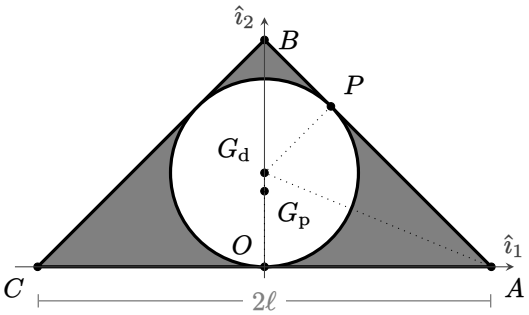
$\overrightarrow{OG} = \frac{\sin\Theta}{\Theta}\hat{\imath}_1 + \frac{1-\cos\Theta}{\Theta}\hat{\imath}_2$

Esercizio 3.4 — È dato un riferimento ortonormale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ nel piano ed una lamina omogenea come in figura. La lamina ha forma circolare di raggio r centrata in O, con una cavità anch'essa circolare di raggio $\frac{1}{2}r$ tangente al bordo e centrata in $C = \frac{r}{2}\hat{\imath}_2$. Si calcoli la posizione del centro di massa nella configurazione rappresentata assumendo che l'oggetto sia omogeneo.



$\overrightarrow{OG} = -\frac{r}{6}\hat{\imath}_2$

Esercizio svolto 3.5 — Dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ nel piano, si consideri un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa lunga 2ℓ che giace sull'asse delle ascisse come in figura, in modo che il punto medio sia l'origine O. Nel triangolo è scavata una cavità circolare, tangente ai tre lati. Assumendo la lamina omogenea, si trovi la posizione del centro di massa.



Soluzione — Per ragioni di simmetria, $\overrightarrow{OG} = y\hat{\imath}_2$, ovvero il centro di massa deve essere sull'asse delle ordinate. Sia ρ la densità del sistema e si consideri un triangolo come quello dato ma *senza cavità*. Esso occupa la porzione di piano tale che le coordinate dei punti corrispondenti sono nell'insieme

$$\mathcal{T}_\mathrm{p} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \ell, \quad y - \ell \le x \le \ell - y\}.$$

La massa di tale triangolo è $m_\mathrm{p} = \rho\ell^2$. Il suo centro di massa G_p sarà anch'esso sull'asse delle ordinate in posizione

$$\overrightarrow{OG_\mathrm{p}} = \frac{1}{\rho\ell^2}\int_0^\ell \mathrm{d}\,y \int_{-\ell+y}^{\ell-y} \mathrm{d}\,x\; y\rho\hat{\imath}_2 = \frac{\ell}{3}\hat{\imath}_2.$$

Questo sistema può essere immaginato come la composizione del sistema cavo e di un disco omogeneo che occupa la cavità in figura. Tale disco ha centro di massa G_d nel suo centro geometrico, di nuovo sull'asse delle ordinate per simmetria in modo che $\overrightarrow{OG_\mathrm{d}} = y_\mathrm{d}\hat{\imath}_2$, e coincidente con l'incentro del triangolo. Con riferimento alla figura, detto P il punto di tangenza della cavità sul bordo esterno del triangolo, esso è il piede della perpendicolare condotta da G_d alla retta di equazione nel piano $y = \ell - x$, per cui

$$y_\mathrm{d}^2 = \|\overrightarrow{OG_\mathrm{d}}\|^2 = \|\overrightarrow{G_\mathrm{d}P}\|^2 = \frac{(\ell - y_\mathrm{d})^2}{2} \Rightarrow y_\mathrm{d} = (\sqrt{2}-1)\ell.$$

La massa del disco è inoltre $m_\mathrm{d} = \rho\pi y_\mathrm{d}^2 = \rho(\sqrt{2}-1)^2\pi\ell^2$.

A questo punto possiamo usare il fatto che la massa del sistema cavo è $m = m_\mathrm{p} - m_\mathrm{d}$ e scrivere

$$\overrightarrow{OG_\mathrm{p}} = \frac{m_\mathrm{d}\overrightarrow{OG_\mathrm{d}} + m\overrightarrow{OG}}{m_\mathrm{p}} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{m_\mathrm{p}\overrightarrow{OG_\mathrm{p}} - m_\mathrm{d}\overrightarrow{OG_\mathrm{d}}}{m_\mathrm{p} - m_\mathrm{d}} = \frac{1 + 3(7-5\sqrt{2})\pi}{3 + 3(2\sqrt{2}-3)\pi}\ell\hat{\imath}_2.$$

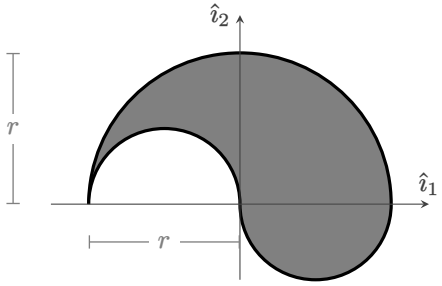
Esercizio 3.6 — In un riferimento nel piano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ è dato un oggetto lineare nella forma di una semicirconferenza i cui punti X sono individuati da,

$$\vec{x}(u) = \cos u\hat{\imath}_1 + \sin u\hat{\imath}_2, \qquad u \in [0,\pi].$$

Assumendo l'oggetto omogeneo, se ne calcoli il centro di massa.

$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{\pi}\hat{\imath}_2$

Esercizio 3.7 — È dato un riferimento ortonormale $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ nel piano ed una lamina omogenea in esso. L'arco esterno di semicirconferenza ha raggio r ed è centrato in O. Con riferimento alla figura, si calcoli la posizione del centro di massa nella configurazione rappresentata assumendo che l'oggetto sia omogeneo.



$\overrightarrow{OG} = \frac{r}{4}\hat{\imath}_1 + \frac{r}{\pi}\hat{\imath}_2$

Esercizio 3.8 — Un insieme infinito di punti materiali $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ è dato sull'asse delle ascisse ed è tale che la massa m_k del punto P_k è $m_k = \frac{1}{k!}m$. Inoltre, $\overrightarrow{OP_k} = k\hat{\imath}_1$. Si calcoli la posizione del centro di massa.

$\overrightarrow{OG} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\hat{\imath}_1$

Sia dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ nello spazio tridimensionale.

Esercizio 3.9 — Un punto materiale P si muove di traiettoria $\vec{x}_P(t) = t\hat{\imath}_1 + t^2\hat{\imath}_2$. Si calcoli il lavoro W eseguito dalla forza agente su di esso $\vec{F}_P(\vec{x}_P) = x_1(\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2)$ nell'intervallo $t \in [0, 1]$, dove abbiamo indicato con x_1 la prima componente del vettore $\vec{x}$.

$W = \frac{7}{6}$

Esercizio 3.10 — Un punto materiale P si muove di traiettoria $\vec{x}_P(t) = t\hat{\imath}_1 + \mathrm{e}^{-t}\,\hat{\imath}_2$. Si calcoli il lavoro W eseguito dalla forza agente su di esso $\vec{F}_P(\vec{x}_P, \dot{\vec{x}}_P) = \vec{x}_P + \dot{\vec{x}}_P$ nell'intervallo $t \in [0, 1]$.

$W = \frac{3}{2}$

Esercizio 3.11 — Un punto materiale di massa m si muove di moto circolare nel piano verticale come $\vec{x}_P(t) = \cos t\,\hat{\imath}_1 + \sin t\,\hat{\imath}_3$, ed è soggetto alla forza $\vec{F}_P(\dot{\vec{x}}_P) = -mg\hat{\imath}_3 + \alpha\dot{\vec{x}}_P$, g accelerazione di gravità. Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza in un periodo, ovvero $t \in [0, 2\pi]$, mostrando che per $\alpha \to 0$ esso si annulla.

$W = 2\pi\alpha$

Esercizio 3.12 — È data la forza posizionale $\vec{F}(\vec{x}) = (x_3 - \alpha x_2)\hat{\imath}_1 + x_2\hat{\imath}_2 + (\beta x_1 - x_3)\hat{\imath}_3$, definita in tutto lo spazio euclideo. Dire per quali valori di α e β essa è conservativa.

$\alpha = 0$, $\beta = 1$