FOGLIO 2

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA

ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Cinematica e cambi di riferimento

Tutti i riferimenti sono cartesiani ortonormali e positivamente orientati. Gli angoli sono orientati, con verso positivo antiorario nel piano ortogonale a $\hat{\imath}_3$, osservato dalla punta di $\hat{\imath}_3$ verso l'origine.

Esercizio 2.1 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$. È dato inoltre un secondo riferimento $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{\imath}_3$, tale che $\hat{e}_1$ forma un angolo ωt con la direzione di $\hat{\imath}_1$. Un punto materiale P si muove con traiettoria rettilinea nella forma

$$\vec{x}_P(t) = t\hat{\imath}_1 + a\hat{\imath}_2, \quad a > 0$$

rispetto al riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$. Si calcoli la sua traiettoria rispetto al riferimento $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{\imath}_3$.

$\vec{x}^{\star}_P = (t\cos\omega t + a\sin\omega t)\hat{e}_1 + (a\cos\omega t - t\sin\omega t)\hat{e}_2$

Esercizio 2.2 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$. È dato inoltre un secondo riferimento $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{\imath}_3$, tale che $\overrightarrow{OO_\star} = ut\hat{\imath}_1$, e che l'angolo tra $\hat{\imath}_1$ e $\hat{e}_1$ sia $\alpha(t) = t$, $u > 0$. Si supponga ora che un punto P sia identificato nel secondo riferimento da

$$\vec{x}^{\star}_P = \overrightarrow{O_\star P} = \sin t\,\hat{e}_1 + \cos t\,\hat{e}_2.$$

Si determinino la velocità di P nel riferimento $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{\imath}_3$ e nel riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$.

$\vec{v}^{\star}_P = \cos t\,\hat{e}_1 - \sin t\,\hat{e}_2$, $\vec{v}_P = u\hat{\imath}_1$

Esercizio 2.3 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$. È dato inoltre un secondo riferimento $O_\star\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{\imath}_3$, tale che $\overrightarrow{OO_\star}$ giaccia nel piano passante per O e ortogonale a $\hat{\imath}_3$, abbia norma unitaria e formi un angolo $\varphi(t) = \omega t$ con $\hat{\imath}_1$. Inoltre, $\hat{e}_1$ forma un angolo $\theta(t) = \bar{\omega}t$ con la direzione di $\hat{\imath}_1$. Si supponga ora che un punto P sia identificato nel riferimento fisso da

$$\vec{x}_P = \hat{\imath}_1.$$

Si determinino l'accelerazione di trascinamento e quella di Coriolis nel riferimento mobile nella base del riferimento fisso.

$\vec{a}^{\,\tau}_P = \left((\bar{\omega}^2 - \omega^2)\cos\omega t - \bar{\omega}^2\right)\hat{\imath}_1 + (\bar{\omega}^2 - \omega^2)\sin\omega t\,\hat{\imath}_2$

$\vec{a}^{\,c}_P = 2\left((\bar{\omega}\omega - \bar{\omega}^2)\cos\omega t + \bar{\omega}^2\right)\hat{\imath}_1 + 2(\bar{\omega}\omega - \bar{\omega}^2)\sin\omega t\,\hat{\imath}_2$