FOGLIO 1

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA

ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Vettori e curve

Esercizio 1.1 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ nel piano, e sono inoltre dati i seguenti vettori: $\overrightarrow{OP}$ di modulo 4 e tale da formare un angolo $\pi/6$ con $\hat{\imath}_1$; $\overrightarrow{OQ} = \sqrt{3}\hat{\imath}_1 - 3\hat{\imath}_2$; $\overrightarrow{RP} = 2\sqrt{3}\hat{\imath}_1$. Si determinino $\|\overrightarrow{OQ}\|$, il versore corrispondente a $\overrightarrow{OQ}$, $\|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\|$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{OR}$ e $\|\overrightarrow{QR}\|$. Si determini inoltre l'angolo α tra $\overrightarrow{QR}$ e $\hat{\imath}_1$.

$\|\overrightarrow{OQ}\| = 2\sqrt{3}$, $\mathrm{vers}(\overrightarrow{OQ}) = {}^1\!/_2\hat{\imath}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath}_2$, $\|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\| = 2\sqrt{7}$, $\overrightarrow{QP} = \sqrt{3}\hat{\imath}_1 + 5\hat{\imath}_2$, $\overrightarrow{OR} = 2\hat{\imath}_2$, $\|\overrightarrow{QR}\| = 2\sqrt{7}$, $\alpha = \pi - \arctan\frac{5}{\sqrt{3}}$

Esercizio 1.2 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2$ nel piano. Il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha modulo 6 e forma un angolo pari a $\frac{2\pi}{3}$ con $\hat{\imath}_1$. Il vettore $\overrightarrow{OQ}$ ha modulo 2 e forma un angolo pari a $\frac{\pi}{4}$ con $\hat{\imath}_1$. Si calcolino $\|\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ}\|$ e $\|\overrightarrow{QP}\|$.

$\|\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ}\| = 2\sqrt{13 + 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}$, $\|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{40 - 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$.

Esercizio 1.3 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ nello spazio tridimensionale e in esso sono dati i vettori $\overrightarrow{OP} = 2\hat{\imath}_1 + 3\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$, $\overrightarrow{OQ} = \hat{\imath}_1 - \hat{\imath}_2$, $\overrightarrow{OR} = 4\hat{\imath}_1 - 2\hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3$. Si calcoli $2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{QR}$.

$2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{QR} = 14\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3$

Esercizio 1.4 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ nello spazio tridimensionale e in esso sono dati i vettori $\overrightarrow{OP} = 2\hat{\imath}_1 + 2\sqrt{3}\hat{\imath}_2$, $\overrightarrow{OQ} = -\sqrt{3}\hat{\imath}_2$. Si calcolino $\|\overrightarrow{OP}\|$, $\|\overrightarrow{OQ}\|$, $\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\rangle$ e $\|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}\|$.

$\|\overrightarrow{OP}\| = 4$, $\|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{3}$, $\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\rangle = -6$ e $\|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}\| = 2\sqrt{3}$

Esercizio 1.5 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ nello spazio tridimensionale e tre punti P, Q, R nello spazio di coordinate rispettivamente $\mathbf{x}_P = (1, 2, 0)^\intercal$, $\mathbf{x}_Q = (-1, 1, 1)^\intercal$, $\mathbf{x}_R = (0, 0, 3)^\intercal$. Scrivere $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{RQ}$.

$\overrightarrow{QP} = 2\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$, $\overrightarrow{PQ} = -2\hat{\imath}_1 - \hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3$, $\overrightarrow{RP} = \hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 - 3\hat{\imath}_3$, $\overrightarrow{RQ} = -\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 - 2\hat{\imath}_3$

Esercizio 1.6 — È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ nello spazio tridimensionale e in esso sono dati i vettori $\overrightarrow{OP} = 2\hat{\imath}_1 - 3\hat{\imath}_2$, $\overrightarrow{OQ} = \sqrt{2}\hat{\imath}_1 - \sqrt{3}\hat{\imath}_2$, $\overrightarrow{OR} = -2\sqrt{2}\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2$. Si calcolino $\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\rangle$, $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{OP}$, $\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{OR}\rangle$, $(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}) \wedge \overrightarrow{OR}$ e $\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{OR})$.

$\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\rangle = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ} = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\hat{\imath}_3$, $\overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{OP} = -(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\hat{\imath}_3$, $\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{OR}\rangle = 0$, $(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ}) \wedge \overrightarrow{OR} = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\hat{\imath}_1 + 2\sqrt{2}\hat{\imath}_2)$, $\overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{OR}) = \sqrt{2}(2\sqrt{3} - 1)(3\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2)$

Esercizio 1.7 — Dati $\overrightarrow{OP} = -\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2$ e $\overrightarrow{OQ} = 3\hat{\imath}_1 + 3\hat{\imath}_2$ in uno spazio tridimensionale con riferimento cartesiano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$, si determinino, se esistono, i vettori $\vec{v}$ tali che $\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$.

$\vec{v} = \lambda(\hat{\imath}_1 - \hat{\imath}_2) - 3\hat{\imath}_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Esercizio 1.8 — Dati $\overrightarrow{OP} = 2\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$ e $\overrightarrow{OQ} = 3\hat{\imath}_1 + 3\hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3$ in uno spazio tridimensionale con riferimento cartesiano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$, si determinino, se esistono, i vettori $\vec{v}$ tali che $\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$.

Non esiste alcun vettore.

Esercizio 1.9 — Dati $\overrightarrow{OP} = 2\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$ e $\overrightarrow{OQ} = 3\hat{\imath}_1 + 3\hat{\imath}_2 + 9\hat{\imath}_3$ in uno spazio tridimensionale con riferimento cartesiano $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$, si determinino, se esistono, i vettori $\vec{v}$ tali che $\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$.

$\vec{v} = 2\hat{\imath}_1 - \frac{7}{2}\hat{\imath}_2 + \frac{1}{2}\hat{\imath}_3 + \lambda(2\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

È dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ nello spazio tridimensionale.

Esercizio 1.10 — Si consideri la curva

$$\vec{\gamma}(u) = \cos u\, \hat{\imath}_1 + \sin u\, \hat{\imath}_2 + u\hat{\imath}_3, \quad u \in [0, 2\pi].$$

Se ne calcoli la lunghezza.

$\ell = 2\sqrt{2}\pi$

Esercizio 1.11 — Si consideri la curva

$$\vec{\gamma}(u) = u\, \hat{\imath}_1 + \sin u\, \hat{\imath}_2 + \cos u\, \hat{\imath}_3, \quad u \in [0, 2\pi].$$

Dopo aver verificato la sua regolarità, si scriva in termini della sua parametrizzazione naturale. Si scrivano inoltre gli elementi della sua base intrinseca.

$\gamma_\star(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_1 + \sin\frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_2 + \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_3$, $\hat{v}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_3$, $\hat{n}(s) = -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_2 - \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_3$,
$\hat{b}(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\hat{\imath}_3$, con $s \in [0, 2\sqrt{2}\pi]$

Esercizio 1.12 — Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(\vec{x}) = x_2^2\hat{\imath}_1 + x_1\hat{\imath}_2.$$

Si calcoli il suo integrale lungo la curva

$$\vec{\gamma}(u) = \cos u\, \hat{\imath}_1 + u\hat{\imath}_2 + u^2\hat{\imath}_3, \quad u \in [-\pi, \pi].$$

L'integrale è nullo

Negli esercizi seguenti, si assuma dato un riferimento $O\hat{\imath}_1\hat{\imath}_2\hat{\imath}_3$ nello spazio tridimensionale.

Esercizio 1.13 — Siano dati i vettori applicati $(A, \vec{v}_A)$ e $(B, \vec{v}_B)$ tali che

- $\overrightarrow{OA} = 2\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 + 3\hat{\imath}_3$, $\vec{v}_A = -2\hat{\imath}_1 - 2\hat{\imath}_2 + 3\hat{\imath}_3$;
- $\overrightarrow{OB} = \hat{\imath}_3$, $\vec{v}_B = 2\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$.

Si calcoli il vettore risultante $\vec{R}$, il momento risultante $\vec{\tau}_O$ rispetto ad O, il momento risultante $\vec{\tau}_P$ rispetto a P individuato da $\overrightarrow{OP} = \hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_3$ e l'invariante scalare I.

$\vec{R} = -2\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_3$, $\vec{\tau}_O = 10\hat{\imath}_1 - 12\hat{\imath}_2$, $\vec{\tau}_P = 10\hat{\imath}_1 - 8\hat{\imath}_2$, $I = -20$

Esercizio 1.14 — Determinare il momento e il braccio b della coppia costituita dai vettori applicati $(A, \vec{v})$ e $(B, -\vec{v})$ dove $\overrightarrow{OA} = \hat{\imath}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\imath}_2 - \sqrt{5}\hat{\imath}_3$, $\overrightarrow{OB} = -\hat{\imath}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\imath}_3$ e $\vec{v} = 3\hat{\imath}_2 + 4\hat{\imath}_3$.

$b = 3$, $\vec{\tau} = 5\sqrt{5}\hat{\imath}_1 - 8\hat{\imath}_2 + 6\hat{\imath}_3$

Esercizio 1.15 — Sia dato il sistema di vettori applicati $\mathcal{S} = \{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^3$, dove

- $\overrightarrow{OP_1} = \hat{\imath}_1$, $\vec{v}_1 = \hat{\imath}_1 - 2\hat{\imath}_2 + \hat{\imath}_3$;
- $\overrightarrow{OP_2} = 2\hat{\imath}_2$, $\vec{v}_2 = \hat{\imath}_2 - 3\hat{\imath}_3$;
- $\overrightarrow{OP_3} = 3\hat{\imath}_3$, $\vec{v}_3 = 2\hat{\imath}_1 + 3\hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3$.

Si calcolino risultante, momento risultante rispetto ad O, momento risultante rispetto a Q, individuato da $\overrightarrow{OQ} = \hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 + 3\hat{\imath}_3$, invariante scalare ed equazione dell'asse centrale.

$\vec{R} = 3\hat{\imath}_1 + 2\hat{\imath}_2 - 3\hat{\imath}_3$, $\vec{\tau}_O = -15\hat{\imath}_1 + 5\hat{\imath}_2 - 2\hat{\imath}_3$, $\vec{\tau}_Q = -3\hat{\imath}_1 - 7\hat{\imath}_2 + 2\hat{\imath}_3$, $I = -29$, asse centrale dato da punti X tali che $\overrightarrow{OX} = \left(\frac{1}{2} + 3\lambda\right)\hat{\imath}_1 + \left(\frac{51}{22} + 2\lambda\right)\hat{\imath}_2 + \left(\frac{45}{22} - 3\lambda\right)\hat{\imath}_3$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Esercizio 1.16 — Sia dato il sistema di vettori applicati $\mathcal{S} = \{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^4$, dove

- $\overrightarrow{OP_1} = \hat{\imath}_2$, con un certo $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$;
- $\overrightarrow{OP_2} = \hat{\imath}_1 - \hat{\imath}_2$, $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$;
- $\overrightarrow{OP_3} = -\hat{\imath}_2 + 2\hat{\imath}_3$, $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_1$;

- $\overrightarrow{OP_4} = -\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_3$, $\vec{v}_4 = 3\vec{v}_1$.

Trovare il centro C.

$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}(-\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 - \hat{\imath}_3)$.

Esercizio 1.17 — Sia dato il sistema di vettori applicati $\mathcal{S} = \{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^4$, dove

- $\overrightarrow{OP_1} = \hat{\imath}_1$, $\vec{v}_1 = 2\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2$;
- $\overrightarrow{OP_2} = \hat{\imath}_2$, $\vec{v}_2 = -\hat{\imath}_1 + 3\hat{\imath}_2$;
- $\overrightarrow{OP_3} = -2\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2$, $\vec{v}_3 = -3\hat{\imath}_2$;
- $\overrightarrow{OP_4} = 5\hat{\imath}_1 - 3\hat{\imath}_2$, $\vec{v}_4 = -\hat{\imath}_1 - \hat{\imath}_2$.

Verificare che è equilibrato.