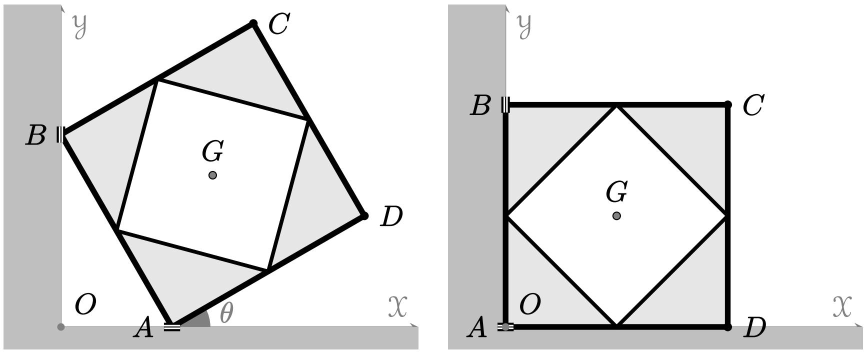
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

27 Gennaio 2025

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. Il voto minimo per l'accesso all'orale è 15/30.

In un piano verticale è data una lamina quadrata di lato ℓ con centro geometrico G e vertici A, B, C e D. Essa presenta una cavità quadrata come in figura, anch'essa di centro G, con vertici i punti medi dei lati della lamina. L'oggetto risultante è omogeneo, ha densità superficiale ρ ed è vincolato tramite due carrelli in A e B a due assi cartesiani, di modo che A possa scorrere senza attrito lungo il semiasse orizzontale *positivo* $\mathcal{X}$ e B possa scorrere senza attrito lungo il semiasse verticale *positivo* $\mathcal{Y}$.



A Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema utilizzando come parametro lagrangiano l'angolo θ in figura, e dire se esse sono stabili o instabili.

B Il momento di inerzia di una lamina quadrata omogenea di lato L e massa M_L rispetto ad un asse ad essa ortogonale passante per il suo centro di massa è

$$I^{\mathrm{L}} = \frac{M_L L^2}{6}.$$

Utilizzando questo fatto e il teorema di Huygens–Steiner, si determini, in funzione di ρ, il momento di inerzia dell'oggetto rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per il vertice A.

C Si supponga ora che in A venga aggiunta una massa puntiforme m_A: si trovi il valore di m_A in funzione della massa della lamina m affinché il centro di massa del sistema sia sul bordo della cavità interna.

Suggerimento. Per rispondere a questa domanda, si può assumere $\theta = 0$, ovvero che il sistema sia nella configurazione in cui $A \equiv O$ (figura in alto a destra). Si usi il fatto che il nuovo centro di massa cadrà sul segmento $\overline{AG}$.

Soluzione

A Sul sistema è applicata un'unica forza attiva e conservativa, ovvero la forza peso. La posizione del centro di massa è, per ragioni di simmetria, nel centro del quadrato, ovvero

$$\boldsymbol{x}_G = \left(\ell \sin\theta + \frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \frac{\ell}{\sqrt{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}_2$$

dove $\theta \in [0, {}^1\!/_2\pi]$ è l'angolo in figura. Detta m la massa del corpo, il potenziale è

$$U(\theta) = -\frac{mg\ell}{\sqrt{2}}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + \text{costante}$$

con configurazioni di frontiera $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. I punti di equilibrio nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ possono trovarsi scrivendo

$$\partial_\theta U(\theta) = -\frac{mg\ell}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Essendo

$$\partial^2_\theta U(\theta)|_{\theta=\theta_2} = \frac{mg\ell}{\sqrt{2}} > 0$$

il punto è di equilibrio *instabile*. Studiamo ora le posizioni di frontiera. Consideriamo l'espansione di $U(\theta)$ attorno a $\theta_0 = 0$ con $\theta > 0$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ con $\theta < \frac{\pi}{2}$, ottenendo rispettivamente

$$U(\theta) = -\frac{mg\ell}{2} - \frac{mg\ell}{2}\theta + o(\theta), \qquad U(\theta) = -\frac{mg\ell}{2} - \frac{mg\ell}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + o\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

In entrambi i casi, la correzione al termine dominante è *negativa*, il che vuol dire che le posizioni sono localmente di massimo per U, ovvero di equilibrio stabile.

B Osserviamo anzitutto che la cavità interna ha lato $\frac{1}{\sqrt{2}}\ell$. Il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa G si può calcolare come

$$I_G = \frac{M_L \ell^2}{6} - \frac{M_l ({}^\ell\!/_{\sqrt{2}})^2}{6}$$

dove M_L ed M_l sono le masse di una lamina quadrata di lato ℓ e di una lamina quadrata di lato $\frac{1}{\sqrt{2}}\ell$ rispettivamente, entrambe omogenee e di densità ρ, ovvero $M_L = \ell^2\rho$ e $M_l = \frac{1}{2}\rho\ell^2$, per cui

$$I_G = \frac{\rho\ell^4}{6} - \frac{\rho\ell^4}{24} = \frac{\rho\ell^4}{8}.$$

Osserviamo ora che la massa totale m del corpo si può ottenere moltiplicando ρ per la sua area, ovvero $m = \rho(\ell^2 - \frac{1}{2}\ell^2) = \frac{1}{2}\rho\ell^2$ e che A dista $\frac{1}{\sqrt{2}}\ell$ da G, per cui, applicando il teorema di Huygens–Steiner,

$$I_A = I_G + md^2(A,G) = \frac{\rho\ell^4}{8} + \frac{1}{4}\rho\ell^4 = \frac{3}{8}\rho\ell^4.$$

C Consideriamo come suggerito la configurazione a $\theta = 0$. Il centro di massa del sistema prima dell'aggiunta della massa puntiforme in C è, per motivi di simmetria, al centro del quadrato, ovvero in posizione

$$\boldsymbol{x}_G = \frac{\ell}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \frac{\ell}{2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_2.$$

D'altra parte la posizione di A è nell'origine, $\boldsymbol{x}_A = \boldsymbol{0}$. La posizione del nuovo centro di massa $\hat{G}$ dopo l'aggiunta della massa in A è

$$\boldsymbol{x}_{\hat{G}} = \frac{m\boldsymbol{x}_G + m_A\boldsymbol{0}}{m+m_A} = \frac{m\boldsymbol{x}_G}{m+m_A}.$$

Perché sia sul bordo della cavità interna, il nuovo centro di massa deve essere sul punto medio del segmento $\overline{AG}$, che ha lunghezza $\frac{1}{\sqrt{2}}\ell$, ovvero deve essere a distanza $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ell$ dall'origine, per cui

$$\frac{\ell^2}{8}=\|\boldsymbol{x}_{\hat{G}}\|^2=\left(\frac{m_A}{m+m_A}\right)^2\|\boldsymbol{x}_G\|^2=\left(\frac{m_A}{m+m_A}\right)^2\frac{\ell^2}{2}\Rightarrow\frac{2m_A}{m+m_A}=1\Leftrightarrow m_A=m.$$