

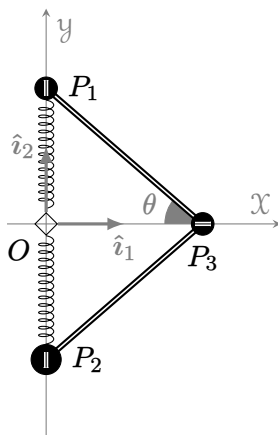
## ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA  
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

17 Giugno 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Il voto minimo per l'accesso all'orale è 15/30.

Si consideri un riferimento cartesiano  $O\hat{i}_1\hat{i}_2$  come in figura, orientato in modo che il versore di base  $\hat{i}_2$  sia contrario alla forza peso. Due masse puntiformi, in  $P_1$  e  $P_2$  rispettivamente, sono vincolate a scorrere lungo l'asse  $\mathcal{Y}$ , corrispondente alla direzione  $\hat{i}_2$ , su lati opposti rispetto all'origine, dove è presente un fermo che non può essere attraversato. La massa più in alto,  $P_1$ , ha valore  $m_1 = m$ , mentre quella più in basso,  $P_2$ , ha valore  $m_2 = 2m$ . Ciascuna massa è collegata da un'asta rigida di lunghezza  $\ell$  allo stesso punto materiale  $P_3$ , avente massa pari a  $m_3 = m$ . Tale punto materiale è vincolato a scorrere, tramite un carrello ideale, lungo il semiasse positivo  $\mathcal{X}$ , orientato come  $\hat{i}_1$ . Infine, le masse in  $P_1$  e  $P_2$  sono ciascuna collegata all'origine da una molla ideale di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica  $k$ .



Usando come parametro lagrangiano per il sistema l'angolo  $\theta$  in figura, si risponda alle seguenti domande.

- A Si calcoli il centro di massa del sistema. [5 pt]
- B Si calcolino i momenti d'inerzia del sistema secondo gli assi cartesiani  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{Z}$ , asse ortogonale al piano di direzione  $\hat{i}_3 = \hat{i}_1 \wedge \hat{i}_2$ . [6 pt]
- C Si determinino le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema e se ne studi la stabilità in funzione del parametro  $\eta := \frac{mg}{k\ell}$ . [12 pt]
- D Si calcoli il momento angolare del sistema rispetto all'origine e rispetto al centro di massa. [7 pt]

SOLUZIONE

Anzitutto osserviamo che, per via dei vincoli,  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

**A** Possiamo applicare la definizione osservando che le tre masse in  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  hanno posizione individuata rispettivamente da

$$\mathbf{p}_1 = \ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \mathbf{p}_2 = -\ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \mathbf{p}_3 = \ell \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1.$$

Allora il centro di massa è in

$$\mathbf{x}_G = \frac{m\mathbf{p}_1 + 2m\mathbf{p}_2 + m\mathbf{p}_3}{4m} = \frac{\ell \cos \theta}{4} \hat{\mathbf{i}}_1 - \frac{\ell \sin \theta}{4} \hat{\mathbf{i}}_2.$$

**B** I tre casi si studiano applicando direttamente la definizione  $I_{\mathcal{R}} = \sum_i m_i d^2(P_i, \mathcal{R})$ , ovvero

$$I_x = 3m(\ell \sin \theta)^2, \quad I_y = m(\ell \cos \theta)^2, \quad I_z = 3m(\ell \sin \theta)^2 + m(\ell \cos \theta)^2,$$

risultando il contributo di  $P_3$  a  $I_x$  nullo e il contributo di  $P_1$  e  $P_2$  a  $I_y$  nullo.

**C** Il potenziale del sistema si può scrivere come

$$U(\theta) = mg\ell \sin \theta - k(\ell \sin \theta)^2 + \text{costante} \equiv k\ell^2 (\eta \sin \theta - \sin^2 \theta) + \text{costante}.$$

Cerchiamo le configurazioni di equilibrio *ordinarie* imponendo

$$\partial_\theta U(\theta) = k\ell^2 \cos \theta (\eta - 2 \sin \theta) = 0$$

che per  $\theta \in (0, \pi/2)$  si annulla se  $\sin \theta = \frac{\eta}{2}$ , che ha soluzione per  $0 \leq \eta \leq 2$ : in questo caso si ottiene  $\theta = \arcsin \frac{\eta}{2}$ . Per studiarne la stabilità, calcoliamo la derivata seconda,

$$\partial_\theta^2 U(\theta) = -k\ell^2 (\eta \sin \theta + 2(1 - 2 \sin^2 \theta)).$$

Per  $\sin \theta = \frac{\eta}{2}$ , questa quantità è pari a  $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\arcsin \frac{\eta}{2}} = -2k\ell^2 \left(1 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2\right)$ , che è sempre negativa quando  $\eta < 2$ , per cui la configurazione è sempre stabile, quando esiste, eccetto nel punto marginale  $\eta = 2$ .

La configurazione di confine  $\theta = \pi/2$  ammette spostamenti virtuali  $\delta\theta < 0$ : possiamo quindi studiare la variazione del potenziale  $\delta U = \partial_\theta U(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \delta\theta$  al primo ordine e valutare se  $\delta U \leq 0$  in questo punto. Essendo  $\partial_\theta U(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ , la posizione è di equilibrio per il principio dei lavori virtuali. Per capire se è di equilibrio stabile o instabile, occorre studiare se la funzione cresce o decresce per  $\delta\theta < 0$ : ciò si vede guardando gli ordini superiori, ovvero scrivendo

$$\delta U = \partial_\theta U(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \delta\theta + \frac{1}{2} \partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} (\delta\theta)^2 + \dots$$

Il primo termine è nullo, mentre  $\partial_\theta^2 U(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = k\ell^2(2-\eta)$ , che è negativa per  $\eta > 2$ : in questo regime, quindi, la configurazione  $\theta = \frac{\pi}{2}$  è un massimo locale, ed è quindi stabile, mentre per  $\eta < 2$  è un minimo locale, ed è quindi instabile; infine, per  $\eta = 2$  è un punto marginale.

Esiste infine una seconda configurazione di confine corrispondente a  $\theta = 0$ . Per valutare se questa configurazione è di equilibrio, osserviamo che, in virtù del principio dei lavori virtuali, in tale configurazione possiamo avere solo  $\delta\theta > 0$ . Essendo  $\partial_\theta U|_{\theta=0} = \eta k\ell^2 > 0$ ,  $\delta U = \partial_\theta U|_{\theta=0} \delta\theta > 0$  per cui la configurazione *non* è di equilibrio.

**D** È possibile rispondere al quesito applicando la definizione. Da quanto detto sopra, le velocità dei tre punti sono

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{p}}_1 = \ell \dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{p}}_2 = -\ell \dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_2, \quad \mathbf{v}_3 = \dot{\mathbf{p}}_3 = -\ell \dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_1.$$

Osservando che  $\mathbf{p}_i \parallel \mathbf{v}_i$ , il momento angolare del sistema rispetto all'origine è nullo, dato che  $L_O = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{p}_i \wedge \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ , che è quindi una somma di vettori nulli. Il

momento angolare rispetto al centro di massa è invece

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{p}_1 - \mathbf{x}_G) \wedge (m\mathbf{v}_1) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{x}_G) \wedge (2m\mathbf{v}_2) + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{x}_G) \wedge (m\mathbf{v}_3) \\ &= -m\mathbf{x}_G \wedge (\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = -m\ell\dot{\theta} \left( \frac{\cos\theta}{4}\hat{\mathbf{i}}_1 - \frac{\sin\theta}{4}\hat{\mathbf{i}}_2 \right) \wedge (-\sin\theta\hat{\mathbf{i}}_1 - \cos\theta\hat{\mathbf{i}}_2) \\ &= \frac{m\ell\dot{\theta}}{4}\hat{\mathbf{i}}_3. \end{aligned}$$

dove, nel secondo rigo, abbiamo usato che  $\mathbf{v}_i \parallel \mathbf{p}_i$ . Alternativamente, si può usare il fatto che  $\mathbf{L}_O = \mathbf{L} + \mathbf{x}_G \wedge \mathbf{Q}$  e quindi  $\mathbf{L} = -\mathbf{x}_G \wedge \mathbf{Q}$  che è proprio la formula sopra dato che  $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_1 + 2m\mathbf{v}_2 + m\mathbf{v}_3$ .