

ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

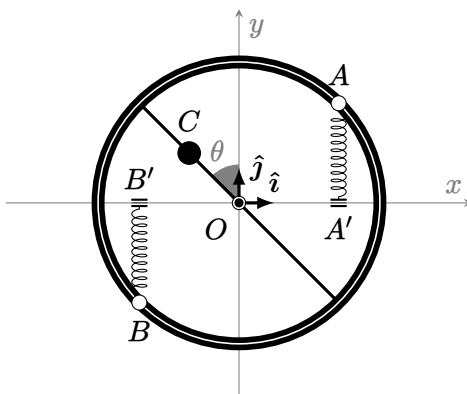
CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

22 Marzo 2024

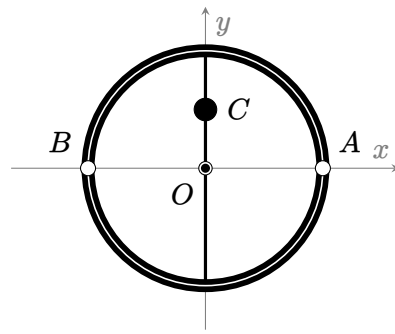
Appello straordinario per studenti fuori corso

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Un punteggio superiore a 30 corrisponde alla lode.

Sia dato un piano verticale con riferimento cartesiano inerziale $O\hat{i}\hat{j}$ come in figura. Un anello omogeneo di massa m e raggio 2ℓ è vincolato a ruotare senza attrito attorno al suo centro, coincidente con O , senza uscire dal piano. Il vincolo è realizzato tramite un'asta, di massa trascurabile, coincidente con un diametro dell'anello, e incernierata nel suo centro sull'origine del riferimento. Su tale asta si trova inoltre, a distanza ℓ dal centro, una massa pari a $2m$ (in posizione C in figura). Infine, due punti A e B dell'anello, estremi del diametro ortogonale a \overrightarrow{OC} , sono collegati, tramite due molle ideali di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, all'asse x in due punti rispettivamente indicati con A' e B' : le molle sono vincolate all'asse per mezzo di due carrelli, in modo tale che i segmenti AA' e BB' si mantengano sempre perfettamente verticali.



- A** Ricavare le coordinate del centro di massa del sistema in funzione di ℓ e dell'angolo θ , indicato in figura, tra l'asse delle ordinate e \overrightarrow{OC} . Calcolare inoltre il momento d'inerzia I_z del sistema rispetto all'asse z ortogonale al piano e passante per O . [6 pt]
- B** Determinare le configurazioni ordinarie di equilibrio in funzione di $\eta := \frac{k\ell}{gm}$. Supponendo che $\eta = 1$, dire se la configurazione corrispondente a $\theta = 0$ è di equilibrio e, in caso, se si tratta di una configurazione di equilibrio stabile o meno. [12 pt]
- C** Determinare la reazione vincolare in O in condizioni statiche e dinamiche. [6 pt]
- D** Assumendo $\theta = 0$ (ovvero nella configurazione rappresentata in basso), calcolare il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse x e rispetto all'asse y . [6 pt].



E Spiegare perché il tensore d'inerzia del sistema rispetto ad O è diagonale nella base ortonormale $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$, con $\hat{k} = \hat{i} \wedge \hat{j}$, quando $\theta = 0$ [5 pt].

SOLUZIONE

- A** Il centro di massa dell'anello \mathcal{A} si trova nell'origine, $\mathbf{p}_A = \mathbf{0}$, per motivi di simmetria. Osservando che la posizione C è data da

$$\mathbf{p}_C = \begin{pmatrix} -\ell \sin \theta \\ \ell \cos \theta \end{pmatrix}$$

abbiamo che il centro di massa ha posizione

$$\mathbf{p}_G = \frac{m\mathbf{p}_A + 2m\mathbf{p}_C}{3m} = \frac{2}{3}\mathbf{p}_C.$$

Il momento d'inerzia si può calcolare sommando il momento d'inerzia dell'anello $I_A = m(2\ell)^2$ rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per l'origine a quello della massa puntiforme rispetto allo stesso asse, come

$$I_z = 4m\ell^2 + 2m\ell^2 = 6m\ell^2.$$

- B** Osservando che le posizioni dei punti A e B si scrivono come

$$\mathbf{p}_A = 2\ell \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = -\mathbf{p}_B$$

abbiamo che, indicando $\mathbf{p}_\bullet = (x_\bullet, y_\bullet)^\top$ le posizioni dei vari punti, l'energia potenziale¹ è

$$V = 3mgy_G + \frac{1}{2}ky_A^2 + \frac{1}{2}ky_B^2 = 2mg\ell \cos \theta + 4k\ell^2 \sin^2 \theta,$$

per cui i punti di equilibrio si trovano ponendo

$$\partial_\theta V = -2mg\ell \sin \theta + 8k\ell^2 \cos \theta \sin \theta = -2mg\ell \sin \theta (1 - 4\eta \cos \theta) = 0,$$

che è risolto per $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, oppure per $1 - 4\eta \cos \theta = 0$, equazione che ammette soluzione se e solo se $\eta \geq \frac{1}{4}$: in tal caso

$$\theta = \pm \arccos \frac{1}{4\eta} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{se } \eta \geq \frac{1}{4}.$$

Calcolando la derivata seconda,

$$\partial_\theta^2 V = 2mg\ell (-\cos \theta + 4\eta(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) = 2mg\ell (4\eta \cos 2\theta - \cos \theta).$$

Per $\theta = 0$ questa quantità è uguale a $\partial_\theta^2 V|_{\theta=0} = 2mg\ell(4\eta - 1)$, per cui si ha stabilità solo se $\eta > \frac{1}{4}$: nelle condizioni richieste la configurazione è dunque stabile.

- C** Dalla prima equazione cardinale della statica, abbiamo che la reazione vincolare Φ_O in O deve essere opposta a tutte le forze attive, ovvero

$$\Phi_O = -3mg - \overrightarrow{kAA'} - \overrightarrow{kBB'} = 3mg\hat{j}.$$

dove $\mathbf{g} = -g\hat{j}$ è l'accelerazione di gravità e abbiamo usato il fatto che $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{BB'}$. Per calcolare la reazione vincolare in condizione dinamiche, scriviamo

$$\Phi_O + 3mg + \overrightarrow{kAA'} + \overrightarrow{kBB'} = \Phi_O - 3mg\hat{j} = 3m\ddot{\mathbf{p}}_G \Rightarrow$$

$$\Phi_O = 2m\ell(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta)\hat{i} + m(3g - 2\ell\ddot{\theta} \sin \theta - 2\ell\dot{\theta}^2 \cos \theta)\hat{j}.$$

- D** Il momento di un anello omogeneo di raggio R e massa m rispetto ad un asse baricentrale che giace nel piano dell'anello stesso è $\frac{1}{2}mR^2$, ovvero nel nostro caso $2m\ell^2$. Possiamo calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse x e all'asse y sommando a questa quantità il momento della massa puntiforme nei due casi,

$$I_x = 2m\ell^2 + 2m\ell^2 = 4m\ell^2, \quad I_y = 2m\ell^2,$$

dato che nel primo caso la massa puntiforme dista ℓ dall'asse e nel secondo caso dista 0.

- E** La matrice d'inerzia rispetto all'origine \mathbf{I}_O è diagonale nella base ortonormale data, poiché i prodotti d'inerzia I_{xy} , I_{yz} e I_{xz} sono tutti nulli. In particolare,

¹Si può naturalmente utilizzare in alternativa il potenziale $U = -V$ e cercare i suoi punti di massimo.

- $I_{yz} = I_{xz} = 0$, essendo il sistema nel piano, ovvero sia i punti del disco che le due masse puntiformi hanno coordinata nulla lungo z ;
- $I_{xy} = 0$ essendo la coordinata x della massa puntiforme in C nulla, mentre il contributo dovuto all'anello è nullo per ragioni di simmetria.