

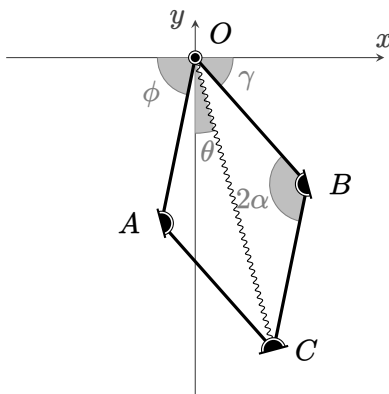
## ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA  
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

7 Febbraio 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Il voto minimo per l'accesso all'orale è 15/30.

In figura è rappresentato un sistema mobile su un piano dove è dato un riferimento cartesiano  $Oxy$ . Il sistema è costituito da quattro aste di massa trascurabile e di uguale lunghezza  $\ell$ , imperniate con quattro giunti mobili in modo da formare un rombo di vertici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $O$ . I giunti in  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono tali da permettere alle aste incidenti di avere un angolo reciproco compreso tra l'angolo nullo e l'angolo piatto. Il restante vertice  $O$  è fissato nell'origine del riferimento cartesiano, dove un perno permette una rotazione libera senza attrito. Sono inoltre presenti una massa  $m$  in  $A$ , una massa  $m$  in  $B$  e una massa  $m$  in  $C$ . Tutte le masse sono da assumersi puntiformi. Infine, lungo la diagonale  $\overline{OC}$  è collocata una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo trascurabile.



- A** Utilizzando come parametri lagrangiani gli angoli  $\theta$  e  $\alpha$  indicati in figura, scrivere le coordinate dei tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Si individuino possibili configurazioni di confine, le forze *attive* agenti sul sistema e il tipo di vincoli a cui esso è soggetto. [7 pt]
- B** Individuare la posizione del centro di massa in funzione dei parametri lagrangiani scelti. Calcolare inoltre il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse perpendicolare al piano e passante per l'origine. [8 pt]
- C** Calcolare le configurazioni di equilibrio *non di confine* del sistema, e dire se esse sono di equilibrio stabile, instabile o indifferente. [15 pt]

**Suggerimento.** Per risolvere l'esercizio, si osservi che, con riferimento alla figura, gli angoli  $\phi$  e  $\gamma$  si possono scrivere in termini di  $\alpha$  e  $\theta$  come

$$\phi = \alpha + \theta \quad \gamma = \alpha - \theta.$$

SOLUZIONE

**A** Il sistema ha due gradi di libertà, descritti dai parametri lagrangiani  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in [0, \pi/2]$ : le configurazioni aventi  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$  sono di confine. Indicando con  $g$  vettore di accelerazione di gravità diretto verso il basso, le forze attive agenti sono la forza peso sulla massa in  $A$ ,  $P_A = -mg\hat{i}_2$ , la forza peso sulla massa in  $B$ ,  $P_B = -mg\hat{i}_2$ , e la forza peso sulla massa in  $C$ ,  $P_C = -mg\hat{i}_2$ . Infine, in  $C$  agisce la forza elastica  $F_C = k\overrightarrow{CO}$  dove  $CO$  ha lunghezza  $2\ell \sin \alpha$ . L'unico vincolo attivo è il perno in  $O$  che è olonomo e ideale e permette la rotazione del sistema. Le coordinate dei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono

$$x_A = -\ell \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}, \quad x_B = \ell \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\theta) \\ -\sin(\alpha-\theta) \end{pmatrix}, \quad x_C = 2\ell \sin \alpha \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

**B** La posizione del centro di massa è

$$x_G = \frac{mx_A + mx_B + mx_C}{3m} = \frac{\ell}{3} \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta) + 2\sin \alpha \sin \theta \\ -\sin(\alpha-\theta) - \sin(\alpha+\theta) - 2\sin \alpha \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{4\ell \sin \alpha}{3} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

dove nell'ultimo passaggio si sono usate le formule di addizione  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$  e  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ .

Il momento d'inerzia si trova ora facilmente essendo pari a

$$I = m\|x_A\|^2 + m\|x_B\|^2 + m\|x_C\|^2 = 2m\ell^2(1 + 2\sin^2 \alpha).$$

**C** Osservando che  $d^2(C, O) = 4\ell^2 \sin^2 \alpha$ , possiamo scrivere l'energia potenziale come combinazione di un contributo gravitazionale  $U_g$  e un contributo elastico  $U_k$ . Avendo a disposizione le coordinate del centro di massa, possiamo scrivere

$$U_g = 4m\ell g \cos \theta \sin \alpha, \quad U_k = -2k\ell^2 \sin^2 \alpha$$

così che l'energia potenziale globale possa scriversi

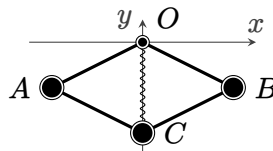
$$U = U_g + U_k = 4m\ell g \cos \theta \sin \alpha - 2k\ell^2 \sin^2 \alpha.$$

I punti stazionari si ottengono risolvendo la coppia di equazioni

$$\partial_\theta U = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha \sin \theta = 0, \quad \partial_\alpha U = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha (mg \cos \theta - k\ell \sin \alpha) = 0.$$

Dato che stiamo escludendo le configurazioni di confine, possiamo assumere  $\cos \alpha \neq 0$  e  $\sin \alpha \neq 0$ . Deve essere quindi  $\sin \theta = 0$ , abbiamo  $\theta = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Se  $n$  è pari, la seconda equazione fornisce  $mg - k\ell \sin \alpha = 0$ , ovvero, se  $\frac{mg}{k\ell} < 1$ ,  $\alpha = \arcsin \frac{mg}{k\ell}$ : diversamente non esiste una soluzione *che non sia di confine*. Se  $n$  è dispari, si ottiene  $-mg - k\ell \sin \alpha = 0$  che non ha soluzione per  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . L'unico possibile punto stazionario è quindi

$$(1) \quad (\alpha, \theta) = \left( \arcsin \frac{mg}{k\ell}, 0 \right), \quad \text{se } \frac{mg}{k\ell} < 1.$$



La stabilità può essere studiata valutando la matrice Hessiana in questo punto di equilibrio. La matrice è

$$\begin{aligned} H &= -4\ell \begin{pmatrix} k\ell(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + mg \sin \alpha \cos \theta & mg \sin \theta \cos \alpha \\ mg \sin \theta \cos \alpha & mg \cos \theta \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= -4\ell \begin{pmatrix} k\ell(1 - 2\sin^2 \alpha) + mg \sin \alpha \cos \theta & mg \sin \theta \cos \alpha \\ mg \sin \theta \cos \alpha & mg \cos \theta \sin \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calcolando sul punto dato dall'Eq. (1), si ha che  $\sin \theta = 0$  e  $\sin \alpha = \frac{mg}{k\ell}$ , per cui

$$H = 4k\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{m^2 g^2}{k^2 \ell^2} - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{m^2 g^2}{k^2 \ell^2} \end{pmatrix} \quad \text{con } \frac{mg}{k\ell} < 1.$$

Nell'intervallo di validità della soluzione,  $4k\ell^2 \left( \frac{m^2 g^2}{k^2 \ell^2} - 1 \right) < 0$ , per cui tale punto di equilibrio, quando esiste, è stabile.

**Q** Lo studio delle configurazioni di confine non era richiesto ma lo riportiamo per completezza come esempio. Le configurazioni di confine sono associate a  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$ . L'analisi può essere svolta utilizzando il principio dei lavori virtuali, ovvero calcolando  $\delta U$  e imponendo che tale variazione virtuale sia sempre negativa. Non avendo  $\theta$  vincoli di variazione, la prima condizione da imporre è  $\partial_\theta U = 0$ , ovvero  $\sin \alpha \sin \theta = 0$ .

Per  $\alpha = 0$ ,  $\partial_\theta U|_{\alpha=0} = 0$  sempre; dovendo essere  $\delta\alpha > 0$ ,  $\partial_\alpha U|_{\alpha=0} \leq 0$ , ovvero  $\partial_\alpha U|_{\alpha=0} = 4\ell mg \cos \theta \leq 0$ , che è vera se e solo se  $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ : in questo intervallo di angoli  $\theta$ ,  $\alpha = 0$  è una configurazione di confine stabile.

Per  $\alpha = \pi/2$ , la situazione è più delicata. Infatti,  $\partial_\theta U|_{\alpha=\pi/2} = -4\ell mg \sin \theta = 0$  è soddisfatto per  $\theta = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . In  $\alpha = \pi/2$ , abbiamo che  $\partial_\alpha U|_{\alpha=\pi/2} = 0$  identicamente. Questo ci permette di dire che i punti  $(\alpha, \theta) = (\pi/2, n\pi)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sono di equilibrio. Per capire se essi sono stabili o instabili, però, occorre considerare derivate di ordine superiore. La matrice hessiana è

$$H = \begin{pmatrix} 4\ell^2 - 4mg\ell \cos \theta & 0 \\ 0 & -4mg\ell \cos \theta \end{pmatrix}$$

che per  $\theta = n\pi$  con  $n$  pari ha entrambi autovalori non positivi per  $\frac{mg}{kl} \geq 1$ , mentre per  $n$  dispari ha entrambi autovalori positivi ed è quindi instabile. Di conseguenza  $(\alpha, \theta) = (\pi/2, n\pi)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  pari, è stabile se  $\frac{g}{kl} \geq 1$ , diversamente è instabile. È possibile eseguire un plot del valore di  $\alpha$  associato ad una configurazione stabile al variare del parametro di controllo  $\frac{mg}{kl}$  per  $\theta = 0$ .

$\alpha$  stabile per  $\theta = 0$

