FOGLIO 0

MECCANICA RAZIONALE — CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

G. SICURO

2026

Curve e coniche.

Talvolta le curve nel piano sono date non in coordinate cartesiani ma polari, ovvero per mezzo una assegnata coppia di funzioni $(\rho(u), \theta(u))$ di un certo parametro $u \in I$, tale che $\rho \colon I \to \mathbb{R}^+$ e $\theta \colon I \to J$, intendendo che $\boldsymbol{\gamma}(u) = (\rho(u)\cos\theta(u), \rho(u)\sin\theta(u))^\intercal$. Nei seguenti esercizi le curve sono date in questa parametrizzazione.

Esercizio 0.1 (Cardioide) — La coppia di funzioni

$$\rho(u) = 1 + \cos u, \qquad \theta = u, \qquad u \in [0, 2\pi]$$

descrive una *cardioide*, curva che si può pensare come tracciata da un punto sul bordo di un disco che ruota su un altro disco nel piano. Se ne calcoli la lunghezza.

Esercizio 0.2 (Spirale di Archimede) — Consideriamo la cosiddetta *spirale di Archimede* nel piano, parametrizzata in coordinate polari come

$$\rho(u) = \frac{au}{2\pi}, \qquad \theta(u) = u + \frac{\pi}{2}, \qquad u \in \mathbb{R}^+$$

dove $a \in \mathbb{R}^+$ è un parametro della spirale. Sia P il punto della spirale corrispondente a $u = 2\pi$. Con riferimento alla Fig. 1, tracciamo la tangente alla spirale in P e sia Q il punto di intersezione della tangente con l'asse delle ascisse. Si dimostri che il triangolo PQO ha area uguale al cerchio di centro O passante per P, risultato dovuto ad Archimede (*Sulle spirali*, 225 a.C. circa).

Esercizio 0.3 (Spirale logaritmica) — Un ramo di *spirale logaritmica* è la curva $\boldsymbol{\gamma}$ in $\mathbb{R}^2$ descritta dalle coordinate polari

$$\rho(u) = \mathrm{e}^{ku}, \quad \theta(u) = u, \quad u \in (-\infty, a],$$

dove $k > 0$. Si calcoli la lunghezza della curva. Con riferimento alla Fig. 1, si dimostri che la tangente nel punto P individuato da $\boldsymbol{\gamma}(u)$ alla circonferenza con centro O e passante P ha un angolo ϑ con la tangente alla spirale in P che non dipende da u. Si derivi infine la parametrizzazione intrinseca della curva.

Esercizio 0.4 — Si calcoli la lunghezza del ramo di parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ con $x \in [0, 1]$.

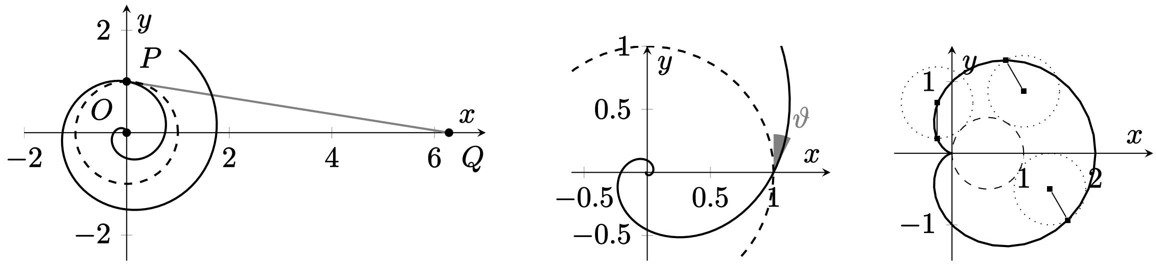

FIGURA 1. Spirale di Archimede (a sinistra) e logaritmica (centro); sulla destra, cardioide.