

ESAME DI MECCANICA RAZIONALE
ESAME DI FISICA MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica
Alma Mater – Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 180 minuti e il punteggio massimo della prova è pari a 30 punti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. L'uso di calcolatrici grafiche, tablet, smartphones o apparecchiature in grado di comunicare con l'esterno non è consentito. È possibile utilizzare una calcolatrice scientifica standard.

ESERCIZIO A

Moto in campo centrale

Un punto materiale di massa unitaria e posizione $\mathbf{x}$ si muove sotto l'azione di un potenziale radiale

$$V(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2r^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

dove $r = \|\mathbf{x}\|$ è la distanza da una opportuna origine di un riferimento inerziale. Si supponga che il modulo del momento angolare sia $L \neq 0$. Nel seguito indicheremo con φ l'anomalia del punto rispetto ad un riferimento nel piano del moto e supporremo sempre valida la disuguaglianza $\alpha + L^2 > 0$.

A1 Si esegua uno studio qualitativo del moto radiale nel piano delle fasi $(r, \dot{r})$, determinando eventuali orbite circolari e la loro stabilità.

A2 Si scriva la seconda forma dell'equazione delle orbite per la variabile $u = \frac{L}{r}$, mostrando che essa è risolta da

$$(1) \quad u(\varphi) = L \frac{1 + e \cos(\omega\varphi)}{L^2 + \alpha}.$$

Si determini $\omega > 0$ in funzione di α ed L . Per quali valori di α/L^2 le orbite non circolari limitate sono chiuse?

A3 Si consideri l'orbita associata alla soluzione in Eq. (1) con $e \in (0, 1)$. Per $\varphi = 0$ il punto materiale si trova a distanza minima dal centro (pericentro). Il punto torna per la prima volta a distanza minima dal centro quando assume una certa anomalia φ . Si dica, in funzione di α , se il pericentro ha compiuto un moto *progrado* ($\varphi > 2\pi$) o *retrogrado* ($\varphi < 2\pi$).

ESERCIZIO B

Formalismo lagrangiano

Un punto materiale P di massa unitaria è vincolato a muoversi in un piano dove è fissato un riferimento inerziale. Il punto è individuato dalle sue due coordinate cartesiane

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

in tale riferimento. Sia data ora la matrice di rotazione $\mathbf{R}(t)$ e la matrice $\mathbf{K}$ definite come segue

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\kappa} \end{pmatrix}, \quad \kappa > 1.$$

Il punto materiale è soggetto al potenziale dipendente dal tempo

$$V(t, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{K}\mathbf{R}(t)\mathbf{q}\|^2.$$

B1 Si scriva la lagrangiana $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del punto materiale. Si verifichi che essa è invariante sotto l'azione del gruppo ad un parametro

$$(t, \mathbf{q}) \mapsto (t + s, \mathbf{R}(-s)\mathbf{q}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Qual è l'integrale primo del moto associato a questa invarianza?

B2 Si consideri ora la coppia di variabili lagrangiane

$$\hat{\mathbf{q}} := \mathbf{R}(t)\mathbf{q}.$$

Si riscriva $\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in termini delle nuove variabili mostrando che la lagrangiana risultante $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})$ è invariante per traslazioni temporali. Si scrivano le equazioni di Eulero–Lagrange ottenute da tale lagrangiana e, infine, l'integrale del moto associato a tale invarianza in termini delle nuove variabili.

Suggerimento. — Nell'eseguire il calcolo può essere utile osservare che

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \omega \mathbf{J} \mathbf{R}(t) = \omega \mathbf{R}(t) \mathbf{J},$$

dove

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha le proprietà $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}^\top = -\mathbf{J}$.

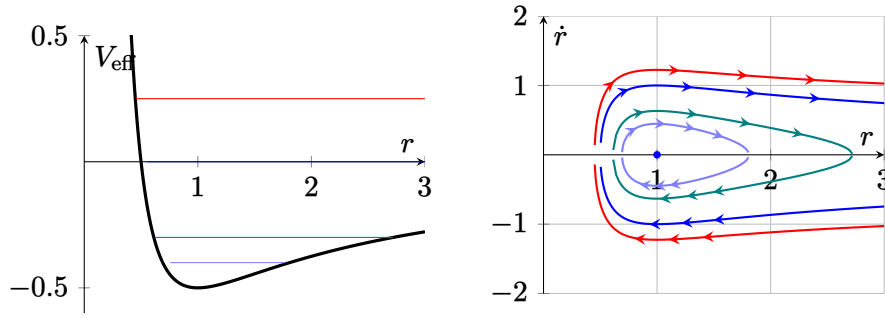


FIGURA 1. Potenziale e diagramma di fase per l'Esercizio A per $L^2 + \alpha = 1$.

SCHEMA DI RISOLUZIONE

Esercizio A. Indichiamo $\eta := L^2 + \alpha$.

A1 Il potenziale efficace del problema è

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2r^2} + V(r) = \frac{\eta}{2r^2} - \frac{1}{r}.$$

Esso ha $\lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(r) = +\infty$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(r) = 0$; inoltre

$$V'_{\text{eff}}(r) = -\frac{\eta - r}{r^3}$$

che è strettamente negativa per $r \in (0, \eta)$, strettamente positiva per $r \in (\eta, +\infty)$ e nulla per $r = r_c = \eta$, corrispondente ad un'orbita circolare *stabile* secondo Lagrange, essendo punto di minimo locale (e globale). Abbiamo così i seguenti regimi al variare dell'energia meccanica:

$E < V(r_c) = -\frac{1}{2\eta}$: Moto non ammesso.

$E = V(r_c) = -\frac{1}{2\eta}$: Orbita circolare di raggio r_c .

$E \in (V(r_c), 0)$: Traiettorie limitate, radialmente periodico tra un pericentro e un apocentro.

$E = 0$: Separatrice, $\dot{r} \rightarrow 0$ per $r \rightarrow +\infty$.

$E > 0$: Moto non limitato con esattamente un punto di inversione radiale.

La descrizione qualitativa del moto nel diagramma delle fasi è data in figura.

A2 L'equazione delle orbite nella sua seconda forma è

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -W'(u) = -u + \frac{1}{L} - \frac{\alpha}{L^2}u, \quad W(u) = V_{\text{eff}}\left(\frac{L}{u}\right).$$

Sostituendo la soluzione fornita

$$\frac{1}{L} - \left(1 + \frac{\alpha}{L^2}\right)u = -\frac{L\omega^2}{L^2 + \alpha} \cos(\omega\varphi) = -\omega^2 \left(u - \frac{L}{L^2 + \alpha}\right)$$

che richiede, per essere soddisfatta,

$$\omega^2 = 1 + \frac{\alpha}{L^2}.$$

Orbite chiuse appaiono se esistono $m, n \in \mathbb{N}$ non entrambi nulli e tali che $2\pi m\omega = 2\pi n$, ovvero se $\omega = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{L^2}} \in \mathbb{Q}$, ovvero $\frac{\alpha}{L^2} = q^2 - 1$ con $q \in \mathbb{Q}$.

A3 La soluzione presentata corrisponde all'evoluzione radiale

$$r(\varphi) = \frac{L^2 + \alpha}{1 + e \cos(\omega\varphi)}.$$

Per $\varphi = 0$ il denominatore è massimo e quindi $r(\varphi)$ minimo, come da ipotesi descrivendo una posizione in pericentro. Questo valore viene assunto nuovamente quando $\omega\varphi = 2\pi$, ovvero

$$\varphi = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{L^2}}} = \frac{2\pi L}{\sqrt{\eta}}.$$

Segue

Il moto è retrogrado se $\varphi < 2\pi$ ovvero se

$$L < \sqrt{\eta} \Leftrightarrow L^2 < L^2 + \alpha \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

Similmente, per $-L^2 < \alpha < 0$ il moto è progrado. Il caso $\alpha = 0$ corrisponde al moto kepleriano e il pericentro riappare esattamente dopo una rivoluzione.

Esercizio B.

B1 La lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{2} - \frac{1}{2} \|\mathbf{KR}(t)\mathbf{q}\|^2 = \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2} - \frac{1}{2} (q_1 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t)^2 - \frac{\kappa}{2} (q_2 \cos \omega t - q_1 \sin \omega t)^2.$$

Il gruppo ad un parametro non cambia il termine cinetico, dato che $\|\dot{\mathbf{q}}\| \mapsto \|\mathbf{R}(-s)\dot{\mathbf{q}}\| = \|\dot{\mathbf{q}}\|$. Riguardo il termine potenziale,

$$\|\mathbf{KR}(t)\mathbf{q}\|^2 \mapsto \|\mathbf{KR}(t+s)\mathbf{R}(-s)\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{KR}(t+s-s)\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{KR}(t)\mathbf{q}\|^2$$

e dunque anche quest'ultimo rimane invariato. Utilizzando il teorema di Noether, possiamo calcolare l'invariante osservando che

$$\boldsymbol{\xi} = \left. \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right|_{s=0} = -\mathbf{R}'(0)\mathbf{q} = -\omega\mathbf{J}\mathbf{q}, \quad \tau = \left. \frac{dt_s}{ds} \right|_{s=0} = 1$$

per cui

$$\begin{aligned} I = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\xi} - \tau \dot{\mathbf{q}} \right\rangle + \tau \mathcal{L} &= \langle \dot{\mathbf{q}}, -\omega\mathbf{J}\mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \rangle + \mathcal{L} = \mathcal{L} - \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \omega \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{J}\mathbf{q} \rangle \\ &= -(T(\dot{\mathbf{q}}) + V(t, \mathbf{q})) - \omega(\dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1). \end{aligned}$$

Si noti che l'espressione contiene l'energia meccanica che però *non* viene conservata.

B2 Possiamo ottenere la nuova lagrangiana sostituendo semplicemente nella precedente. Osserviamo che $\mathbf{q} = \mathbf{R}(-t)\hat{\mathbf{q}}$ e quindi

$$\dot{\mathbf{q}} = -\omega\mathbf{JR}(-t)\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{R}(-t)\dot{\hat{\mathbf{q}}} = -\omega\mathbf{R}(-t)\mathbf{J}\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{R}(-t)\dot{\hat{\mathbf{q}}}$$

per cui il termine cinetico diventa

$$\frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \frac{1}{2} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \omega\mathbf{JR}(-t)\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{R}(-t)\dot{\hat{\mathbf{q}}}\|^2 = \frac{\omega^2}{2} \|\hat{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}\|^2 - \omega \langle \dot{\hat{\mathbf{q}}}, \mathbf{J}\hat{\mathbf{q}} \rangle.$$

Il termine potenziale è invece molto semplice,

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{KR}(t)\mathbf{q}\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{K}\hat{\mathbf{q}}\|^2$$

per cui la lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}) = \frac{\omega^2}{2} \|\hat{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}\|^2 - \omega \langle \dot{\hat{\mathbf{q}}}, \mathbf{J}\hat{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2} \|\mathbf{K}\hat{\mathbf{q}}\|^2$$

che è effettivamente indipendente dal tempo. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} (\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \omega\mathbf{J}\hat{\mathbf{q}}) - \omega^2 \hat{\mathbf{q}} - \omega\mathbf{J}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}^\top \mathbf{K}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

ovvero

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} - 2\omega\mathbf{J}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + (\mathbf{K}^2 - \omega^2\mathbf{I})\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

L'integrale primo associato all'invarianza per traslazioni temporali quello fornito dalla funzione hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}} \right\rangle - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}\|^2 - \frac{\omega^2}{2} \|\hat{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{K}\hat{\mathbf{q}}\|^2$$