Esame di Fisica Matematica 2

Corso di laurea in Matematica
Alma Mater – Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 180 minuti e il punteggio massimo della prova è pari a `33 punti`. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. L'uso di calcolatrici grafiche, tablet, smartphones o apparecchiature in grado di comunicare con l'esterno non è consentito. È possibile utilizzare una calcolatrice scientifica standard.

Esercizio A

Moto in campo centrale

Si consideri un punto materiale di massa unitaria, in moto in un campo centrale prodotto dal potenziale

$$V(\mathbf{x}) = 2\|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{2\|\mathbf{x}\|^2} - \alpha \ln \|\mathbf{x}\|, \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \alpha \geq 0.$$

A1 [`4 pt`] Supponendo che nell'istante $t = 0$ si abbia $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$, con $\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$, si mostri che il moto del punto materiale avviene in un piano.

A2 [`6 pt`] Si assuma $\alpha = 1$. Si studi qualitativamente, al variare dell'energia meccanica, il moto radiale del punto materiale supponendo il modulo L del suo momento angolare rispetto all'origine del riferimento valga $L = 1$. Si specifichi il periodo delle orbite circolari.

A3 [`5 pt`] Si assuma ora $\alpha = 0$. Si calcoli il tempo necessario ad un punto materiale con $L = 1$ ed energia meccanica $E > 1/2$ per collidere con il centro del potenziale partendo dal suo apocentro.

Esercizio B

Formalismo lagrangiano

Si consideri un sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - V(\mathbf{q}), \qquad V(\mathbf{q}) := \frac{\|\mathbf{q}\|^2(\|\mathbf{q}\|^2 - 1)}{2} + \frac{\alpha q_1^2}{2},$$

data in termini delle coordinate generalizzate $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$ e dipendente dal parametro $\alpha \geq 1$.

B1 [`3 pt`] Si scrivano le equazioni di Lagrange associate.

Date: 13 Gennaio 2026.

Segue

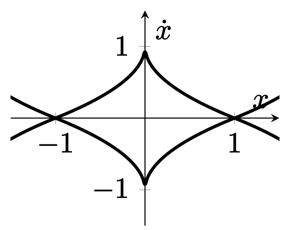
B2 [6 pt] Si assuma $\alpha = 0$. Si verifichi che il sistema lagrangiano ammette come simmetria il gruppo ad un parametro

$$(\mathbf{q}, t) \mapsto \mathbf{G}^s(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{R}(s)\mathbf{q}, t), \qquad \mathbf{R}(s) = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2),$$

e si scriva l'integrale primo associato.

B3 [6 pt] Si assuma $\alpha > 1$. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

QUESITO [3 pt] — Durante lo scorso appello, uno studente di matematica, durante una prova orale, ha disegnato la seguente separatrice in un diagramma delle fasi per un moto unidimensionale parametrizzato dalla variabile x e indotto esclusivamente dall'azione di un potenziale $V(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:



Si spieghi perché questo diagramma non può essere corretto.

Schema di risoluzione

Esercizio A.

A1 *Si vedano gli appunti delle lezioni sui moti in campo centrale.*

A2 Sia L il modulo del momento angolare. Detto $r := \|\mathbf{x}\|$, il moto radiale avviene in un potenziale effettivo

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2r^2} + 2r^2 - \frac{1}{2r^2} - \ln r.$$

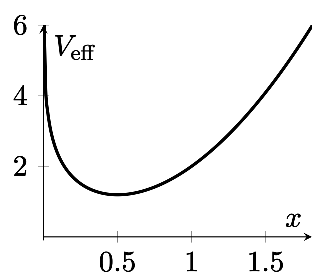
Per $L = 1$ questo potenziale è quindi

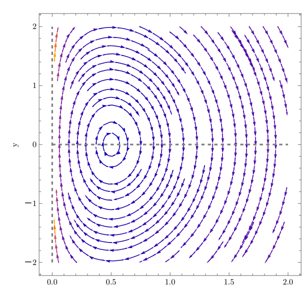
$$V_{\text{eff}}(r) = 2r^2 - \ln r.$$

Si tratta di un potenziale $\mathcal{C}^\infty((0, +\infty))$ i cui punti stazionari sono individuati da

$$V'_{\text{eff}}(r) = 4r - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \equiv r_0.$$

Questo è un punto di minimo essendo $V'_{\text{eff}}(r) < 0$ per $r \in (0, {}^1\!/\!{}_2)$ e viceversa $V'_{\text{eff}}(r) > 0$ per $r > {}^1\!/\!{}_2$. In tale punto $V_{\text{eff}}({}^1\!/\!{}_2) = {}^1\!/\!{}_2 + \ln 2 \equiv V_0$. Abbiamo così che il moto è proibito per $E < V_0$, corrisponde ad un'orbita circolare di raggio r_0 per $E = V_0$, mentre è limitato radialmente tra un pericentro ed un apocentro per ogni $E > V_0$. Non ci sono separatrici nel diagramma di fase per il moto radiale, rappresentato nella figura seguente.





L'unica orbita circolare ha periodo

$$\tau = \frac{2\pi r_0^2}{L} = \frac{\pi}{2}.$$

A3 Per $\alpha = 0$ ed $L = 1$, il potenziale efficace radiale è $V_{\text{eff}}(r) = 2r^2$. Data l'energia meccanica $E > V_0 = {}^1\!/\!{}_2$, l'apocentro è a distanza r_+ dal centro tale che $E = V_{\text{eff}}(r_+) \Rightarrow r_+ = \sqrt{\frac{E}{2}}$, per cui il tempo necessario per raggiungere l'origine è

$$t = -\int_{r_+}^{0} \frac{1}{\sqrt{2(E - 2r^2)}} \,\mathrm{d}\, r = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{4}.$$

Segue

dove abbiamo eseguito la sostituzione $x = \frac{r}{r_+}$ e il segno negativo a fronte nella prima espressione tiene conto del fatto che in questo moto la velocità radiale è negativa (la distanza radiale decresce).

Esercizio B.

B1 Esplicitiamo le equazioni di Eulero–Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1}=\ddot{q}_1+q_1(2\|\mathbf{q}\|^2-1+\alpha)=0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2}=\ddot{q}_2+q_2(2\|\mathbf{q}\|^2-1)=0.$$

B2 La simmetria proposta lascia invariante la Lagrangiana, e in particolare l'azione. Basta infatti osservare che la Lagrangiana dipende solo da $\|\mathbf{q}\|^2$ e $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$, quantità entrambe invarianti sotto l'azione gruppale, $\mathbf{G}^s(\mathbf{q},t)=(\mathbf{q}_s,t_s)\equiv(\mathbf{R}(s)\mathbf{q},t)$, essendo $\|\mathbf{q}_s\|^2=\langle\mathbf{R}(s)\mathbf{q},\mathbf{R}(s)\mathbf{q}\rangle=\langle\mathbf{q},\mathbf{R}(s)^\intercal\mathbf{R}(s)\mathbf{q}\rangle=\|\mathbf{q}\|^2$ e similmente per $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2$. Abbiamo che

$$\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}):=\left.\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{q}_s}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0}=\left.\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{R}(s)}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0}\mathbf{q}=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{q},\qquad \tau(t,\mathbf{q}):=\left.\frac{\mathrm{d}\,t_s}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0}=0.$$

Per via del teorema di Noether, l'invariante è

$$I=\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}},\boldsymbol{\xi}-\tau\dot{\mathbf{q}}\right\rangle+\tau\mathcal{L}=\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}},\boldsymbol{\xi}\right\rangle=\dot{q}_1q_2-\dot{q}_2q_1.$$

B3 Le condizioni di stazionarietà del potenziale V per $\alpha=1$ si scrivono

$$q_1(2\|\mathbf{q}\|^2-1+\alpha)=0,\qquad q_2(2\|\mathbf{q}\|^2-1)=0.$$

Dalla seconda equazione, otteniamo che $q_2=0$ oppure $\|\mathbf{q}\|^2={}^1\!/_2$. Il primo caso comporta, nella prima equazione, $q_1(2q_1^2+\alpha-1)=0$, ovvero $q_1=0$, per cui questo caso corrisponde alla soluzione

$$\mathbf{q}_0=(0,0).$$

Il secondo caso comporta, nella prima equazione, $q_1=0$, per cui $q_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ovvero abbiamo la coppia di soluzioni

$$\mathbf{q}_\pm=(0,\pm{}^1\!/\!\sqrt{2}).$$

La stabilità di questi punti stazionari può essere studiata studiando la matrice hessiana

$$\mathrm{Hess}[V](\mathbf{q})=\begin{pmatrix}6q_1^2+2q_2^2+\alpha-1 & 4q_1q_2\\ 4q_1q_2 & 6q_2^2+2q_1^2-1\end{pmatrix}.$$

In $\mathbf{q}_0$ abbiamo

$$\mathrm{Hess}[V](\mathbf{q}_0)=\begin{pmatrix}\alpha-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

che ha un autovalore negativo ed è perciò instabile. In $\mathbf{q}_\pm$ abbiamo

$$\mathrm{Hess}[V](\mathbf{q}_\pm)=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&2\end{pmatrix}$$

che è definita positiva e perciò corrisponde a due punti di equilibrio stabile.