Esame di Fisica Matematica 2

Corso di laurea in Matematica
Alma Mater – Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 180 minuti e il punteggio massimo della prova è pari a `33 punti`. Risposte non giustificate non verranno conteggiate. L'uso di calcolatrici grafiche, tablet, smartphones o apparecchiature in grado di comunicare con l'esterno non è consentito. È possibile utilizzare una calcolatrice scientifica standard.

Esercizio A
Moto unidimensionale

Si consideri un punto materiale di massa unitaria, individuato dalla coordinata lagrangiana x e in moto sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, da intendersi soggetto a condizioni *periodiche*. Sul punto materiale agisce il potenziale periodico

$$V(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\cos^2 x}.$$

A1 Si esegua uno studio qualitativo del moto, identificando le configurazioni di equilibrio stabile ed instabile al variare dell'energia meccanica, e scrivendo le equazioni delle separatrici nel piano delle fasi. [`10 pt`]

A2 Si determini il periodo delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile. [`3 pt`]

A3 Si supponga che il punto sia in moto a partire da $t = 0$ con condizione iniziale $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$. In un tempo successivo $\bar{t}$ esso tocca (per la prima volta) velocità $\dot{x}(\bar{t}) = 1/\sqrt{\mathrm{e}}$: si calcoli la posizione $\bar{x} := x(\bar{t})$ del punto materiale. [`2 pt`]

Esercizio B
Formalismo lagrangiano

Si consideri un sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}), \qquad T(\dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle, \quad V(\mathbf{q}) = q_1^2 - \cos(q_1 - q_2) + \sin^2 q_2,$$

data in termini delle coordinate generalizzate $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$.

B1 Si scrivano le equazioni di Lagrange associate. [`3 pt`]

B2 Si verifichi che $q_1 = q_2 = 0$ è un punto di equilibrio stabile. [`6 pt`]

B3 Si scrivano le equazioni per i modi normali associati alle piccole oscillazioni attorno a $q_1 = q_2 = 0$. [`6 pt`]

Quesito [`3 pt`] — Si consideri il sistema nell'Esercizio A. Si dimostri che la porzione limitata di spazio delle fasi racchiusa dalla separatrice ha area minore di π^2.
Suggerimento — Sia $u \in \mathbb{R}$: vale la disuguaglianza $\mathrm{e}^u \geq 1 + u$.

Date: 1 Settembre 2025.

Fine

Schema di risoluzione

Esercizio A.

A1 Il potenziale fornito è $\mathcal{C}^\infty$ sul suo dominio, ed è periodico di periodo pari alla misura dell'intervallo, ovvero 2π. Per individuare i punti stazionari, calcoliamo

$$V'(x) = -\,\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cos x \sin x.$$

I punti stazionari si trovano quindi in $x_\pm = \pm\pi/2$, $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$. Dallo studio del segno della derivata prima, abbiamo che $V(x)$ è strettamente crescente in $(-\pi, -\pi/2)$, strettamente decrescente in $(-\pi/2, 0)$, strettamente crescente in $(0, \pi/2)$ e strettamente decrescente in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, per cui $x_\pm$ sono punti di massimo locale, mentre i restanti punti stazionari sono di minimo locale, con

$$V(x_\pm) = \frac{1}{2}, \qquad V(x_0) = V(x_1) = \frac{1}{2\,\mathrm{e}}.$$

Di conseguenza possiamo distinguere i seguenti regimi a seconda del valore dell'energia meccanica E:

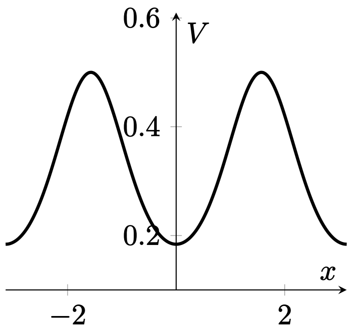
$E < 1/2\mathrm{e}$**:** Moto non ammesso.

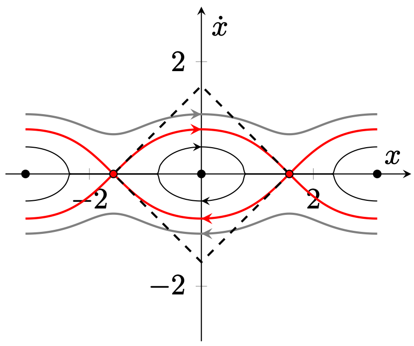
$E = V(0) = V(\pi) = 1/2\mathrm{e}$**:** Configurazioni di equilibrio stabile in $x = 0$ e $x = \pi$.

$E \in (1/2\mathrm{e}, 1/2)$**:** Traiettorie periodiche ammesse in due intorni disgiunti rispettivamente di x_0 e x_1, delimitate da punti di inversione.

$E = V(x_\pm) = 1/\mathrm{e}$**:** Separatrice passante per i due punti di equilibrio instabile $x = x_\pm$, di equazione $\dot{x} = \pm\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\cos^2 x}}$.

$E > V(x_\pm) = 1/\mathrm{e}$**:** Traiettorie estese sull'intero intervallo $(-\pi, \pi]$ senza inversione del moto.





A2 Il periodo delle piccole oscillazioni attorno a $x = 0$ può essere trovato semplicemente ponendo

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{1}{V''(0)}} = 2\pi\sqrt{\mathrm{e}}.$$

Uguale risultato si ottiene attorno a $x = \pi$.

A3 Poiché l'energia meccanica deve conservarsi, abbiamo (indicando $\bar{x} \equiv x(\bar{t})$)

$$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\dot{x}^2(0) + V(x(0)) = \frac{1}{2}\dot{x}^2(\bar{t}) + V(x(\bar{t})) \Rightarrow \mathrm{e}^{-\cos^2\bar{x}} = 1 \Rightarrow \cos\bar{x} = 0,$$

che implica che $\bar{x} = \pi/2$: l'energia infatti corrisponde a traiettorie che si sviluppano senza punti di inversione e la velocità iniziale è positiva.

Esercizio B.

B1 Le equazioni sono date da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1} = \ddot{q}_1 + 2q_1 + \sin(q_1 - q_2) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2} = \ddot{q}_2 - \sin(q_1 - q_2) + 2\sin q_2\cos q_2 = 0.$$

B2 Calcoliamo anzitutto

$$\nabla V(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 2q_1 + \sin(q_1 - q_2) \\ \sin(q_2 - q_1) + 2\sin q_2 \cos q_2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $V(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, come richiesto per un punto di equilibrio. Calcoliamo ora la matrice hessiana

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 2+\cos(q_1-q_2) & -\cos(q_1-q_2) \\ -\cos(q_1-q_2) & \cos(q_2-q_1)+2\cos(2q_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha entrambi gli autovalori strettamente positivi (essendo $\det \mathbf{H}(\mathbf{0}) = 8 > 0$ e $\operatorname{tr} \mathbf{H}(\mathbf{0}) = 6 > 0$) per cui il punto è di equilibrio stabile.

B3 Per ottenere i modi normali, partiamo dalla lagrangiana associata al sistema linearizzato

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{V}}\mathbf{q} \rangle, \qquad \hat{\mathbf{V}} := \mathbf{H}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

e osserviamo che la matrice di massa è, in questo problema, pari alla matrice identica quindi è sufficiente cercare la trasformazione ortogonale $\mathbf{O}$ che diagonalizza $\hat{\mathbf{V}}$. Dal polinomio caratteristico o dalle formule per traccia e determinante si trova che $\hat{\mathbf{V}}$ ha due autovalori, $\omega_1^2 = 4$ e $\omega_2^2 = 2$. Risolvendo l'equazione per gli autovettori, si ottiene

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{O}^{\mathsf{T}}\Omega\mathbf{O}, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Introduciamo quindi $\mathbf{z} := \mathbf{O}\mathbf{q}$ di modo che le equazioni per i modi normali possano scriversi

$$\ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{V}}\mathbf{q} = \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{O}^{\mathsf{T}}\Omega\mathbf{O}\mathbf{q} = \mathbf{0} \Rightarrow \ddot{\mathbf{z}} + \Omega\mathbf{z} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{z}_1 + 4z_1 = 0, \\ \ddot{z}_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}$$

dove

$$z_1 = \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}, \qquad z_2 = \frac{q_2 + q_1}{\sqrt{2}}.$$

Fine