Esame di Fisica Matematica 2

Corso di laurea in Matematica
Alma Mater – Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 120 minuti. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

Esercizio A

Moto in campo centrale

Si consideri un punto materiale di massa unitaria, soggetto ad un potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{1}{1+\sqrt{1+r^2}},$$

con r distanza dall'origine di un riferimento. Sia $L > 0$ il modulo del suo momento angolare rispetto all'origine. Posto $s = 1 + \sqrt{1+r^2}$, si risponda alle seguenti domande.

A1 Detto $V_{\text{eff}}(r)$ il potenziale efficace a cui è soggetto il punto materiale, lo si riesprima in termini della variabile s, ottenendo un nuovo potenziale efficace $U_{\text{eff}}(s)$. Si mostri che $\bar{r}$ è stazionario per V_{eff} se e solo se $\bar{s} = 1 + \sqrt{1+\bar{r}^2}$ è stazionario per $U_{\text{eff}}(s)$, e che il cambio di parametrizzazione non altera il segno della derivata seconda nei punti stazionari.

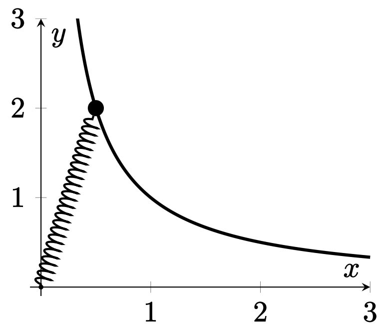
A2 Si esegua uno studio qualitativo del moto radiale al variare del valore dell'energia meccanica E utilizzando il potenziale U_{eff} per $L = 1$. Si individuino, in questo caso, eventuali orbite circolari e se ne calcoli il periodo.

A3 Si considerino valori dell'energia meccanica E compatibili con orbite limitate, e siano $s_\pm(E) = 1 + \sqrt{1 + r_\pm^2(E)}$, dove $r_-(E)$ e $r_+(E)$ sono rispettivamente pericentro ed apocentro all'energia E. Si dimostri che la somma $s_+(E) + s_-(E)$ non dipende da L.

Esercizio B

Formalismo lagrangiano

Un punto materiale di massa unitaria è vincolato sul piano a scorrere su una guida iperbolica liscia, grafico della funzione $y = 1/x$ per $x > 0$ secondo un certo riferimento cartesiano. Il punto è inoltre agganciato ad una molla ideale, di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$, fissata nell'origine del riferimento. Si supponga che la forza elastica sia l'unica forza attiva sul punto.



B1 Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Lagrange.

B2 Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile del sistema, corrispondente al punto dell'iperbole con $x = 1$.

B3 Si indichi una quantità conservata durante il moto, giustificando la risposta.

Date: 9 Luglio 2025.

Segue

QUESITO — Un ricercatore osserva il moto di un sistema di N punti materiali $\{P_k\}_{k=1}^N$, ciascuno in posizione $\mathbf{x}_k$, e postula che la forza sul punto P_i abbia una forma funzionale del tipo $\mathbf{F}_i = \sum_k \boldsymbol{\phi}(\langle \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle)$. Si dica se tale espressione è compatibile con l'invarianza galileiana, giustificando la risposta.

SCHEMA DI RISOLUZIONE

Esercizio A. Osserviamo preliminarmente che, dovendo essere $r > 0$, $s = 1 + \sqrt{1 + r^2} \in (2, +\infty)$.

A1 Imponiamo $s = 1 + \sqrt{1 + r^2} \Leftrightarrow r(s) = \sqrt{(s-1)^2 - 1} = \sqrt{s(s-2)}$ nel potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + r^2}} \Rightarrow V_{\text{eff}}(r(s)) \equiv U_{\text{eff}}(s) = \frac{L^2}{2s(s-2)} - \frac{1}{s}.$$

Osserviamo anzitutto che

$$\left.\frac{\mathrm{d}\, V_{\text{eff}}(r)}{\mathrm{d}\, r}\right|_{r=r(s)} = \frac{1}{r'(s)} \frac{\mathrm{d}\, U_{\text{eff}}(s)}{\mathrm{d}\, s}.$$

In altre parole, la parametrizzazione non cambia il segno della derivata prima essendo $r'(s) = \sqrt{\frac{s}{(s-2)}} > 0$ per $s > 2$. Infine, $V''_{\text{eff}}(r)|_{r=r(s)} = \frac{1}{r'(s)} U''_{\text{eff}}(s) - \frac{r''(s)}{r'(s)^3} U'_{\text{eff}}(s)$, per cui se $\bar{r}$ è un punto stazionario di $V_{\text{eff}}(r)$, detto $\bar{s} = s(\bar{r})$, si ha che $U'_{\text{eff}}(\bar{s}) = V'_{\text{eff}}(\bar{r}) = 0$ e $U''_{\text{eff}}(\bar{s})$ ha lo stesso segno di $V''_{\text{eff}}(\bar{r})$, essendo $V''_{\text{eff}}(\bar{r}) = \frac{1}{r'(\bar{s})} U''(\bar{s})$.

A2 Poniamo $L = 1$. Il potenziale $U_{\text{eff}}(s)$ è definito su $(2, +\infty)$. Abbiamo che

$$\lim_{s \to 2^+} U_{\text{eff}}(s) = +\infty, \qquad \lim_{s \to +\infty} U_{\text{eff}}(s) = 0.$$

Inoltre (ricordando che $s > 2$)

$$U'_{\text{eff}}(s) = -\frac{(s-1)}{s^2(s-2)^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{(s-2)^2 - (s-1)}{s^2(s-2)^2} = \frac{s^2 - 5s + 5}{s^2(s-2)^2}.$$

La derivata si annulla in

$$s^2 - 5s + 5 = 0 \Rightarrow s_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La soluzione s_- è fuori dal dominio, per cui l'unico punto stazionario di U_{eff} corrisponde a $s_+ \equiv s_0 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Questo punto corrisponde al valore $U_{\text{eff}}(s_0) = \frac{\sqrt{5}-3}{4} < 0$. Dal segno di $s^2 - 5s + 5$, che è una parabola con minimo in s_0, deduciamo che U_{eff} è decrescente tra $+\infty$ e $U_{\text{eff}}(s_0)$ in $(2, s_0)$ e crescente tra $U_{\text{eff}}(s_0)$ e 0 in $(s_0, +\infty)$. Di conseguenza possiamo distinguere tre regimi:

$E < U_{\text{eff}}(s_0)$: Moto non ammesso.

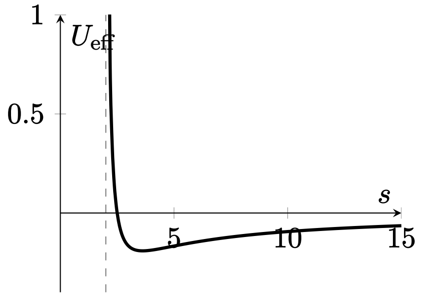
$E = U_{\text{eff}}(s_0)$: Orbita circolare di raggio $r_0 = \sqrt{s_0(s_0 - 2)}$. In tal caso, la legge per l'anomalia è $\theta = \theta_0 + \frac{L}{mr_0^2} t$, per cui, detto τ il periodo,

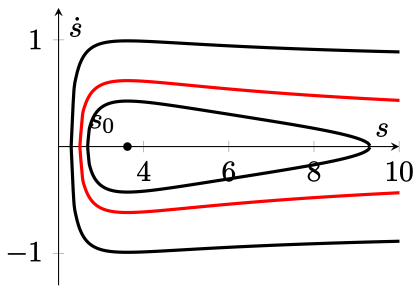
$$\frac{L}{mr_0^2} \tau = 2\pi \Rightarrow \tau = 2\pi r_0^2 = 2\pi s_0(s_0 - 2) = (5 + 3\sqrt{5})\pi.$$

$E \in (U_{\text{eff}}(s_0), 0)$: Orbite limitate comprese tra un pericentro r_- ed un apocentro r_+, punti di inversione del moto radiale, corrispondenti a $s_\pm = 1 + \sqrt{1 + r_\pm^2}$, $2 < s_- < s_+ < +\infty$, soluzioni dell'equazione $U_{\text{eff}}(s) = E$.

$E = 0$: Separatrice tra orbite limitate e orbite illimitate.

$E > 0$: Orbite non limitate: s varia tra un certo $2 < s_- < s_0$, unica soluzione di $U_{\text{eff}}(s) = E$, e $+\infty$.





Segue

A3 Per $E \in (U_{\text{eff}}(s_0), 0)$ le orbite sono limitate, e il moto prende valori $s \in [s_-, s_+]$, con estremi dati dagli zeri dell'equazione

$$E - U_{\text{eff}}(s) = 0 \Leftrightarrow E - \frac{L^2}{2s(s-2)} + \frac{1}{s} = \frac{2Es(s-2) + L^2 + 2(s-2)}{2s(s-2)} = 0,$$

ovvero $s_\pm$ sono le due soluzioni di $2Es(s-2) + L^2 + 2(s-2) = 0$. Poiché L appare solo nel coefficiente del termine di ordine zero, $s_+ + s_-$ non dipende da L per via della formula di Viète applicata ad un polinomio di grado 2[1].

Esercizio B.

B1 Sia $\mathbf{x} = (x, y)^\intercal$ il vettore delle coordinate del punto materiale (ignoriamo la terza coordinata essendo il moto in un piano). Utilizziamo come parametro lagrangiano $q = x > 0$. Per via del vincolo, $\mathbf{x} = (q, {}^1/_q)^\intercal$, per cui $\dot{\mathbf{x}} = \dot{q}(1, -{}^1/_{q^2})^\intercal$. La funzione lagrangiana è

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 - \frac{1}{2}k\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{\dot{q}^2}{2}\left(1 + \frac{1}{q^4}\right) - \frac{k}{2}\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right).$$

L'equazione di Eulero–Lagrange è quindi

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{q}\left(1 + \frac{1}{q^4}\right)\right] + \frac{2\dot{q}^2}{q^5} + k\left(q - \frac{1}{q^3}\right) \\ &= \ddot{q}\left(1 + \frac{1}{q^4}\right) - \frac{4\dot{q}^2}{q^5} + \frac{2\dot{q}^2}{q^5} + k\left(q - \frac{1}{q^3}\right) = \ddot{q}\left(1 + \frac{1}{q^4}\right) - \frac{2\dot{q}^2}{q^5} + k\left(q - \frac{1}{q^3}\right) \end{aligned}$$

che, messa in forma normale, diventa

$$\ddot{q} = \frac{2\dot{q}^2 - kq^2(q^4 - 1)}{q(q^4 + 1)}.$$

B2 Osservando che

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2 - V(q), \qquad A(q) = 1 + \frac{1}{q^4}, \qquad V(q) = \frac{k}{2}\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right)$$

scriviamo anzitutto la lagrangiana associata al problema in approssimazione di piccole oscillazioni attorno al punto $q = 1$, ovvero

$$\hat{\mathcal{L}}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\hat{A}\dot{q} - \frac{1}{2}\hat{V}(q-1)^2, \qquad \hat{A} = A(1) = 2, \qquad \hat{V} = V''(1) = \frac{k}{2}\left(2 + \frac{6}{q^4}\right)\Big|_{q=1} = 4k.$$

Introducendo $\xi = q - 1$, le equazioni del moto sono quindi, in questa approssimazione,

$$\ddot{\xi} + \frac{\hat{V}}{\hat{A}}\xi = \ddot{\xi} + 2k\xi = 0$$

che sono quelle di un oscillatore armonico con pulsazione $\omega^2 = 2k$, ovvero periodo $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2}{k}}$.

B3 La lagrangiana è invariante per traslazioni temporali e dunque, per il teorema di Noether, la sua funzione hamiltoniana si conserva, ovvero

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{1}{2}k\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{\dot{q}^2}{2}\left(1 + \frac{1}{q^4}\right) + \frac{k}{2}\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right)$$

è una costante del moto.

---

[1] La stessa conclusione si ottiene con un calcolo esplicito: il polinomio ha la forma $as^2 + bs + c = 0$ con dipendenza da L solo in c, per cui $s_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow s_+ + s_- = -\frac{b}{a}$.