Esame di Fisica Matematica 2

Corso di laurea in Matematica
Alma Mater – Università di Bologna

Il tempo a disposizione è pari a 120 minuti. Il punteggio di 30/30 si ottiene con la risoluzione completa dell'Esercizio A e dell'Esercizio B. La domanda teorica ha un valore di 3pt aggiuntivi. Risposte non giustificate non verranno conteggiate.

Esercizio A
Moto unidimensionale

Un punto materiale di massa unitaria si muove sull'asse reale $\mathbb{R}$ soggetto all'azione del potenziale

$$V(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A1 Si determinino i punti critici del moto e se ne studi la stabilità.
A2 Si presenti uno studio qualitativo del moto nel piano delle fasi.
A3 Si scriva l'equazione della separatrice e si calcoli l'area della porzione limitata del piano delle fasi da essa racchiusa.

Esercizio B
Formalismo lagrangiano

Un punto materiale di massa unitaria è vincolato su una guida elicoidale liscia e fissa, parametrizzata in un riferimento cartesiano come

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ cu \end{pmatrix}, \qquad u \in \mathbb{R}$$

con $c > 0$ costante fissata. Una molla di costante elastica $k \geq 0$ e lunghezza a riposo nulla connette il punto materiale con l'origine del riferimento. Si assuma che la forza elastica della molla sia l'unica forza attiva agente sul punto materiale.

B1 Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero–Lagrange del sistema.
B2 Si assuma $k = 0$. Si discuta la presenza di variabili cicliche e si scrivano le eventuali quantità conservate associate.
B3 Sia $k > 0$. Si risolvano le equazioni di Eulero–Lagrange assumendo che per $t = 0$ il punto sia nella posizione corrispondente a $u = 0$ e abbia velocità $\mathbf{v} = (0, v_0, cv_0)^\top$.

Quesito — Si consideri un punto materiale di massa m in moto in un potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{1}{4r^3} - \frac{1}{r},$$

dove r è la distanza dall'origine. Si supponga che il punto materiale inizi il suo moto a $t = 0$ infinitamente distante dal centro, con momento angolare rispetto all'origine di modulo pari a $L = \sqrt{2m}$. Si trovi il valore dell'energia per cui $\dot{r} < 0$ per ogni $t > 0$, ma $0 < \lim_{t \to +\infty} r(t) < \infty$.

Date: 16 Giugno 2025.

Segue

SCHEMA DI RISOLUZIONE

Esercizio A.

A1 Essendo il potenziale C^∞ su $\mathbb{R}$, possiamo calcolare i punti critici ponendo

$$V'(x) = x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Il teorema di Dirichlet–Lagrange permette di studiarne la stabilità valutando la derivata seconda, ovvero, dal fatto che $V''(x) = 2x - 1$,

$$V''(x_0) = -1 < 0, \qquad V''(x_1) = 1 > 0$$

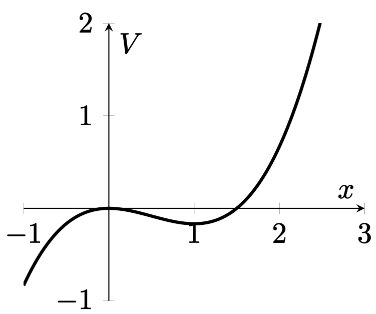
per cui x_0 è un punto di equilibrio instabile e corrisponde ad un massimo di V, mentre x_1 è un punto di equilibrio stabile e corrisponde ad un minimo di V.

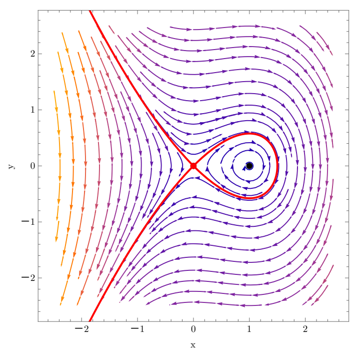
A2 Per uno studio qualitativo del moto, ricordiamo anzitutto che il moto è ammesso quando il punto materiale ha energia

$$E > \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.$$

Osserviamo ora che $\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x\to-\infty} V(x) = -\infty$. La funzione $V(x)$ ha derivata prima $V'(x) = x(x-1) > 0$ per $x \in (-\infty, 0)$, mentre $V'(x) < 0$ per $x \in (0,1)$ e $V'(x) > 0$ per $x > 1$. In x_0 e x_1 compaiono quindi rispettivamente un massimo e un minimo, tali che $V(x_1) = -\frac{1}{6} < V(x_0) = 0$. Abbiamo quindi i seguenti regimi:

- per $E < V(x_1)$, il moto è non limitato e si svolge sull'intervallo $(-\infty, \hat{x}(E)]$ dove $\hat{x}(E) < 0$ è un punto di inversione;
- per $V(x_1) \leq E < V(x_0)$ sono ammesse orbite non limitate sull'intervallo $(-\infty, \hat{x}(E))$ dove $\hat{x}(E) < x_0$ è un punto di inversione, e orbite limitate $[x_-(E), x_+(E)]$ con $x_\pm(E)$ punti di inversione tali che $x_0 < x_-(E) \leq x_1 \leq x_+(E)$: in particolare, per $E = V(x_1)$ queste orbite si riducono al solo punto di equilibrio stabile x_1;
- per $E = V(x_0) = 0$ le traiettorie passano dal punto di equilibrio instabile e corrispondono alla separatrice nel piano delle fasi, costituita da traiettorie non limitate su $(-\infty, x_0)$ e $(x_0, x_+]$ per $x_+ > x_1$, soluzione di $V(x) = E = 0$ maggiore di x_1, ovvero $x_+ = 3/2$ punto di inversione: il punto x_1 è raggiunto solo asintoticamente da moti su queste orbite;
- per $E > V(x_1)$ le traiettorie sono non limitate sull'intervallo $(-\infty, x_+(E)]$, con $x_+(E) > x_1$ punto di inversione.





A3 La separatrice corrisponde alle orbite nel piano delle fasi passanti per il punto di equilibrio instabile, ovvero ottenute per $E = V(x_0) = 0$. Nello spazio delle fasi (x, y) questa è data dall'equazione

$$y = \pm\sqrt{2(E - V(x))} = \pm\sqrt{2}\sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}, \qquad x \leq x_+ = \frac{3}{2}.$$

Le orbite limitate sono su $(x_0, x_+]$. Esse sono associate ad una porzione del piano delle fasi di area

$$A = 2\sqrt{2}\int_0^{x_+} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}}\, x \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{3/2} \sqrt{1 - \frac{2x}{3}}\, x \,\mathrm{d}x$$

Introduciamo il cambio di variabili $u = 1 - \frac{2x}{3}$
$$A = \frac{9}{2}\int_0^1 \sqrt{u}(1-u)\,\mathrm{d}\,u = \frac{9}{2}\int_0^1 u^{1/2}\,\mathrm{d}\,u - \frac{9}{2}\int_0^1 u^{3/2}\,\mathrm{d}\,u = \frac{6}{5}.$$

Esercizio B.

B1 Una scelta naturale per la parametrizzazione lagrangiana del sistema è $q \equiv u$, di modo che la posizione del punto sia $\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\gamma}(u)$ e la sua velocità $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\gamma}'(u)\dot{u}$. Essendo
$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ c \end{pmatrix},$$
l'energia cinetica è quindi
$$T(\dot{u}) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{2}\dot{u}^2(1+c^2).$$
L'energia potenziale è dovuta alla sola molla,
$$V(u) = \frac{1}{2}k\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2}k(1+cu^2).$$
La lagrangiana è quindi
$$\mathcal{L}(u,\dot{u}) = \frac{1}{2}\dot{u}^2(1+c^2) - \frac{1}{2}k(1+cu^2)$$
a cui corrispondono le equazioni di Eulero–Lagrange
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{u}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} = (1+c^2)\ddot{u} + cku = 0.$$

B2 Per $k = 0$ la variabile u è ciclica. La quantità conservata associata è il momento coniugato $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{u}} = \dot{u}(1+c^2)$, ovvero $\dot{u}$ si conserva durante il moto.

B3 Le equazioni del moto sono quelle di un oscillatore armonico,
$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \qquad \omega^2 := \frac{ck}{1+c^2}.$$
Le condizioni iniziali corrispondono a $u(0) = 0$. Essendo $\dot{\mathbf{x}}(0) = \boldsymbol{\gamma}'(0)\dot{u}(0) = (0,1,c)\dot{u}(0)$, dovendo essere questa quantità uguale a $(0, v_0, cv_0)$, allora $\dot{u}(0) = v_0$. Con queste condizioni iniziali
$$u(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t,$$
e dunque $\mathbf{x}(t) = (\boldsymbol{\gamma}\circ u)(t)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{1+c^2}{ck}}$.

Quesito. Il moto radiale del punto materiale può essere descritto dal potenziale efficace
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{1}{4r^3} - \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4r^3} - \frac{1}{r}, \quad r > 0.$$
Questo potenziale ha $\lim_{r\to 0} V(r) = -\infty$ e $\lim_{r\to+\infty} V(r) = 0$. Inoltre
$$V'(r) = -\frac{2}{r^3} + \frac{3}{4r^4} + \frac{1}{r^2} = \frac{4r^2 - 8r + 3}{r^4},$$
per cui $V'(r) = 0$ per $r_\pm = 1 \pm 1/2$. Inoltre, $V''(r) = \frac{6}{r^4} - \frac{3}{r^5} - \frac{2}{r^3} = \frac{-2r^2+6r-3}{r^5}$. Il punto r_- è un massimo, dato che $V''(r_-) < 0$, mentre il punto r_+ è un minimo, essendo $V(r_+) > 0$. Se il punto materiale inizia il suo moto a distanza infinita, deve avere $E \geq 0$: perché tale moto si avvicini monotonicamente al centro senza mai raggiungerlo tendendo asintoticamente ad un $r_0 \in (0, +\infty)$, esso deve avere energia tale da muoversi sulla separatrice del moto radiale, ovvero $E = V_{\text{eff}}(r_-) = 0$, con velocità diretta verso il centro.

Fine