

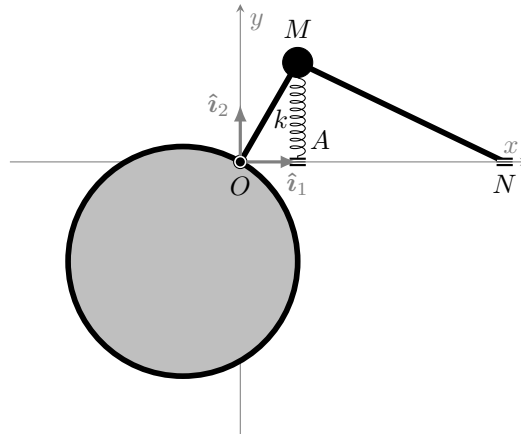
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Simulazione di prova d'esame

ISTRUZIONI. Questa simulazione comprende, a titolo esemplificativo, una collezione di domande per un punteggio massimo maggiore di quello solitamente richiesto in una prova d'esame.

Un disco omogeneo di massa m e raggio ℓ è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un suo punto O , centro di un riferimento inerziale $O\hat{i}_1\hat{i}_2\hat{i}_3$ come in figura, mantendosi nel piano generato da \hat{i}_1 e \hat{i}_2 . Sul punto O è altresì incastrata un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza ℓ , alla cui estremità opposta M si trova una massa $2m$, come mostrato in figura. Detta massa è collegata all'asse del riferimento \mathcal{X} , corrispondente alla direzione \hat{i}_1 , da una molla ideale di costante elastica k : l'estremo opposto della molla A scorre sull'asse senza attrito per mezzo di un carrello. Infine, la massa M è collegata, tramite un'asta rigida \overline{MN} di lunghezza 2ℓ , all'asse delle ascisse: l'asta è vincolata a scorrere lungo l'asse per mezzo di un carrello ideale nel suo estremo N .



Dopo aver individuato un insieme adeguato di variabili lagrangiane, si risolvano i seguenti quesiti.

- A Si determini la posizione del centro di massa del sistema in funzione di opportune variabili lagrangiane. [5 pt]
- B Si calcoli la risultante $\mathbf{R}^{(a)}$ e il trinomio invariante del sistema di forze attive. [5 pt]
- C Si calcoli il momento d'inerzia I_Z del sistema rispetto all'asse Z passante per O e ortogonale al piano. [5 pt]
- D Si esprima l'energia cinetica in funzione dell'evoluzione temporale delle variabili lagrangiane del sistema. [7 pt]
- E Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità. [8 pt]
- F Si calcoli la traiettoria della *base* dell'asta \overline{MN} . [7 pt]

SOLUZIONE

Chiamiamo θ l'angolo \widehat{MON} formato dal vettore \mathbf{p}_M che individua il punto M con l'asse \mathcal{X} , di modo che

$$\mathbf{p}_M = \ell \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + \ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2.$$

- A** Essendo il disco \mathcal{D} omogeneo, il suo centro di massa G coincide con il suo centro geometrico, che si trova in

$$\mathbf{x}_{\mathcal{D}} = -\ell \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 - \ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2 \equiv -\mathbf{p}_M.$$

L'unico altro contributo in massa è dovuto alla presenza del punto M . Il centro di massa del sistema è quindi in

$$\mathbf{x}_G = \frac{m\mathbf{p}_{\mathcal{D}} + 2m\mathbf{p}_M}{3m} = \frac{1}{3}\mathbf{p}_M.$$

- B** Sul sistema agiscono la forza peso e la forza elastica. La prima può considerarsi applicata nel centro di massa G e vale $\mathbf{F}_g = -3mg\hat{\mathbf{i}}_2$. La seconda è applicata in M e vale $\mathbf{F}_e = -k\ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_3$. La risultante è quindi

$$\mathbf{R}^{(a)} = -(3mg + k\ell \sin \theta)\hat{\mathbf{i}}_3.$$

Essendo il sistema piano, il trinomio invariante è nullo, dato che il momento $\boldsymbol{\tau}_O$ delle forze è perpendicolare al piano.

- C** Il momento d'inerzia del disco rispetto alla retta \mathcal{R} parallela a \mathcal{Z} ma passante per il suo centro è $I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\ell^2$. Il centro C è anche il centro di massa del disco, per cui il contributo del disco al momento $I_{\mathcal{Z}}$ si può ottenere grazie al teorema di Huygens–Steiner, ovvero

$$I_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{D}} = I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + m\ell^2 = \frac{1}{2}m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{3}{2}m\ell^2.$$

Il momento d'inerzia totale si ottiene aggiungendo il contributo della massa puntiforme:

$$I_{\mathcal{Z}} = \frac{3}{2}m\ell^2 + 2m\ell^2 = \frac{7}{2}m\ell^2.$$

- D** Il contributo all'energia cinetica del punto M si può scrivere semplicemente come

$$T_M = \frac{1}{2}(2m)\|\dot{\mathbf{p}}_M\|^2 = m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Il contributo del disco si può scrivere usando il Secondo teorema di König, ovvero, indicando con $I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\ell^2$ il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa,

$$T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{D}}\|^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2$$

dove abbiamo usato il fatto che deve essere $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{i}}_3$ (il moto è piano e il disco può solo ruotare con velocità angolare perpendicolare al piano stesso). Basta osservare che $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}$: infatti un riferimento solidale con il disco si può ottenere ruotando di θ il riferimento fisso. Per cui

$$T_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}_{\mathcal{D}}\|^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}\omega^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

per cui l'energia cinetica totale è

$$T = T_{\mathcal{D}} + T_M = \frac{7}{4}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

- E** È utile prima di tutto scrivere il potenziale del sistema, dovuto alla forza gravitazionale e alla presenza della molla

$$U = -3mg\langle \mathbf{x}_G, \hat{\mathbf{i}}_2 \rangle - \frac{1}{2}k\langle \mathbf{p}_M, \hat{\mathbf{i}}_2 \rangle^2 + \text{costante} = -mg\ell \sin \theta - \frac{1}{2}k\ell^2 \sin^2 \theta + \text{costante}.$$

Indicando con $\eta = \frac{mg}{k\ell}$, le configurazioni di equilibrio si possono trovare da

$$\partial_{\theta} U = -mg\ell \cos \theta - k\ell^2 \sin \theta \cos \theta = -k\ell^2 \cos \theta (\eta + \sin \theta) = 0.$$

Restringendoci per semplicità all'intervallo $[-\pi, \pi]$ (tutti i risultati varranno a meno di multipli interi di 2π), tale equazione ha come soluzioni $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, e le due soluzioni corrispondenti a $\sin \theta = -\eta$, ovvero

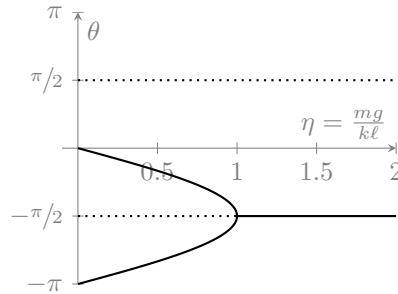
$$\theta = -\arcsin \eta, \quad \theta = -\pi + \arcsin \eta \quad \text{solo se } \eta \leq 1.$$

Per studiare la stabilità, calcoliamo la derivata seconda:

$$\partial_{\theta}^2 U = -k\ell^2 (-\eta \sin \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta)).$$

Abbiamo che

- $\theta = \frac{\pi}{2}$: In questo caso $\partial_\theta^2 U = k\ell^2(1 + \eta) > 0$, ovvero questa configurazione di equilibrio è sempre instabile.
- $\theta = -\frac{\pi}{2}$: In questo caso $\partial_\theta^2 U = k\ell^2(1 - \eta)$, ovvero questa configurazione di equilibrio è stabile solo se $\eta > 1$.
- $\sin \theta = \eta$: In questo caso $\partial_\theta^2 U = -k\ell^2(1 - \eta^2) > 0$, ovvero queste configurazioni di equilibrio sono sempre stabili, quando esistono.



F Il centro istantaneo di rotazione si troverà, per il teorema di Chasles, nell'intersezione tra le perpendicolari delle velocità del punto M e del punto N , ovvero all'intersezione della retta passante per M e orientata come \mathbf{p}_M con la retta passante per N e orientata come $\hat{\mathbf{i}}_2$. In altre parole, il centro istantaneo di rotazione \mathbf{c} è tale che $\mathbf{c} = t\mathbf{p}_M = \mathbf{p}_N + t'\hat{\mathbf{i}}_2$, dove \mathbf{p}_N è il vettore che identifica la posizione di N . Essendo l'asta \overline{MN} di lunghezza 2ℓ , l'angolo $\phi = \widehat{MNO}$ è tale che

$$\ell \sin \theta = 2\ell \sin \phi \Rightarrow \phi = \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{2} \right),$$

che permette di scrivere $\mathbf{p}_N = (\ell \cos \theta + 2\ell \cos \phi)\hat{\mathbf{i}}_1$ da intendersi come funzione di θ . Possiamo scrivere ora due equazioni per t e t' ,

$$t\ell \cos \theta = \ell \cos \theta + 2\ell \cos \phi, \quad t\ell \sin \theta = t'.$$

Dalla prima ricaviamo

$$t = 1 + \frac{2 \cos \phi}{\cos \theta}$$

che permette di scrivere già l'equazione

$$\mathbf{c} = t\mathbf{p}_M = \left(1 + \frac{2 \cos \phi}{\cos \theta} \right) (\ell \cos \theta \hat{\mathbf{i}}_1 + \ell \sin \theta \hat{\mathbf{i}}_2).$$