ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

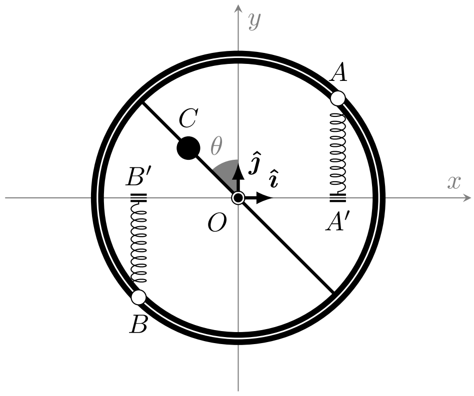
CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

22 Marzo 2024

Appello straordinario per studenti fuori corso

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Un punteggio superiore a 30 corrisponde alla lode.

Sia dato un piano verticale con riferimento cartesiano inerziale $O\hat{\imath}\hat{\jmath}$ come in figura. Un anello omogeneo di massa m e raggio 2ℓ è vincolato a ruotare senza attrito attorno al suo centro, coincidente con O, senza uscire dal piano. Il vincolo è realizzato tramite un'asta, di massa trascurabile, coincidente con un diametro dell'anello, e incernierata nel suo centro sull'origine del riferimento. Su tale asta si trova inoltre, a distanza ℓ dal centro, una massa pari a $2m$ (in posizione C in figura). Infine, due punti A e B dell'anello, estremi del diametro ortogonale a $\overrightarrow{OC}$, sono collegati, tramite due molle ideali di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, all'asse x in due punti rispettivamente indicati con A' e B': le molle sono vincolate all'asse per mezzo di due carrelli, in modo tale che i segmenti $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ si mantengano sempre perfettamente verticali.

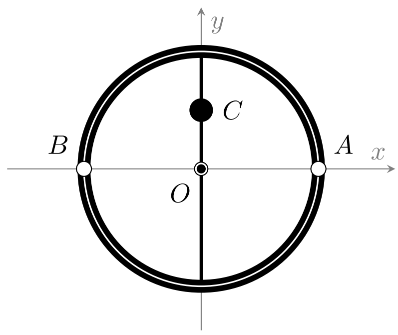


A Ricavare le coordinate del centro di massa del sistema in funzione di ℓ e dell'angolo θ, indicato in figura, tra l'asse delle ordinate e $\overrightarrow{OC}$. Calcolare inoltre il momento d'inerzia I_z del sistema rispetto all'asse z ortogonale al piano e passante per O. [`6 pt`]

B Determinare le configurazioni ordinarie di equilibrio in funzione di $\eta := \frac{k\ell}{gm}$. Supponendo che $\eta = 1$, dire se la configurazione corrispondente a $\theta = 0$ è di equilibrio e, in caso, se si tratta di una configurazione di equilibrio stabile o meno. [`12 pt`]

C Determinare la reazione vincolare in O in condizioni statiche e dinamiche. [`6 pt`]

D Assumendo $\theta = 0$ (ovvero nella configurazione rappresentata in basso), calcolare il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse x e rispetto all'asse y. [`6 pt`].



E Spiegare perché il tensore d'inerzia del sistema rispetto ad O è diagonale nella base ortonormale $\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{k}$, con $\hat{k} = \hat{\imath} \wedge \hat{\jmath}$, quando $\theta = 0$ [`5 pt`].

Soluzione

A Il centro di massa dell'anello $\mathcal{A}$ si trova nell'origine, $\boldsymbol{p}_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{0}$, per motivi di simmetria. Osservando che la posizione C è data da

$$\boldsymbol{p}_C = \begin{pmatrix} -\ell\sin\theta \\ \ell\cos\theta \end{pmatrix}$$

abbiamo che il centro di massa ha posizione

$$\boldsymbol{p}_G = \frac{m\boldsymbol{p}_{\mathcal{A}} + 2m\boldsymbol{p}_C}{3m} = \frac{2}{3}\boldsymbol{p}_C.$$

Il momento d'inerzia si può calcolare sommando il momento d'inerzia dell'anello $I_{\mathcal{A}} = m(2\ell)^2$ rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per l'origine a quello della massa puntiforme rispetto allo stesso asse, come

$$I_z = 4m\ell^2 + 2m\ell^2 = 6m\ell^2.$$

B Osservando che le posizioni dei punti A e B si scrivono come

$$\boldsymbol{p}_A = 2\ell\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -\boldsymbol{p}_B$$

abbiamo che, indicando $\boldsymbol{p}_\bullet = (x_\bullet, y_\bullet)^\intercal$ le posizioni dei vari punti, l'energia potenziale[1] è

$$V = 3mgy_G + \frac{1}{2}ky_A^2 + \frac{1}{2}ky_B^2 = 2mg\ell\cos\theta + 4k\ell^2\sin^2\theta,$$

per cui i punti di equilibrio si trovano ponendo

$$\partial_\theta V = -2mg\ell\sin\theta + 8k\ell^2\cos\theta\sin\theta = -2mg\ell\sin\theta\,(1 - 4\eta\cos\theta) = 0,$$

che è risolto per $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, oppure per $1 - 4\eta\cos\theta = 0$, equazione che ammette soluzione se e solo se $\eta \geq \frac{1}{4}$: in tal caso

$$\theta = \pm\arccos\frac{1}{4\eta} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{se } \eta \geq \frac{1}{4}.$$

Calcolando la derivata seconda,

$$\partial_\theta^2 V = 2mg\ell\left(-\cos\theta + 4\eta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right) = 2mgl\,(4\eta\cos 2\theta - \cos\theta)\,.$$

Per $\theta = 0$ questa quantità è uguale a $\partial_\theta^2 V|_{\theta=0} = 2mg\ell(4\eta - 1)$, per cui si ha stabilità solo se $\eta > \frac{1}{4}$: nelle condizioni richieste la configurazione è dunque stabile.

C Dalla prima equazione cardinale della statica, abbiamo che la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}_O$ in O deve essere opposta a tutte le forze attive, ovvero

$$\boldsymbol{\Phi}_O = -3m\boldsymbol{g} - k\overrightarrow{AA'} - k\overrightarrow{BB'} = 3mg\hat{\boldsymbol{\jmath}}.$$

dove $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ è l'accelerazione di gravità e abbiamo usato il fatto che $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{BB'}$. Per calcolare la reazione vincolare in condizione dinamiche, scriviamo

$$\boldsymbol{\Phi}_O + 3m\boldsymbol{g} + k\overrightarrow{AA'} + k\overrightarrow{BB'} = \boldsymbol{\Phi}_O - 3mg\hat{\boldsymbol{\jmath}} = 3m\ddot{\boldsymbol{p}}_G \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{\Phi}_O = 3m\ell(\dot\theta^2\sin\theta - \ddot\theta\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}} + 3m(g - \ell\dot\theta\ddot\theta\sin\theta - \ell\dot\theta^2\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\jmath}}.$$

D Il momento di un anello omogeneo di raggio R e massa m rispetto ad un asse baricentrale che giace nel piano dell'anello stesso è $\frac{1}{2}mR^2$, ovvero nel nostro caso $2m\ell^2$. Possiamo calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse x e all'asse y sommando a questa quantità il momento della massa puntiforme nei due casi,

$$I_x = 2m\ell^2 + 2m\ell^2 = 4m\ell^2, \qquad I_y = 2m\ell^2,$$

dato che nel primo caso la massa puntiforme dista ℓ dall'asse e nel secondo caso dista 0.

E La matrice d'inerzia rispetto all'origine I_O è diagonale nella base ortonormale data, poiché i prodotti d'inerzia I_{xy}, I_{yz} e I_{xz} sono tutti nulli. In particolare,
- $I_{yz} = I_{xz} = 0$, essendo il sistema nel piano, ovvero sia i punti del disco che le due masse puntiformi hanno coordinata nulla lungo z;
- $I_{xy} = 0$ essendo la coordinata x della massa puntiforme in C nulla, mentre il contributo dovuto all'anello è nullo per ragioni di simmetria.

.

[1] Si può naturalmete utilizzare in alternativa il potenziale $U = -V$ e cercare i suoi punti di massimo.