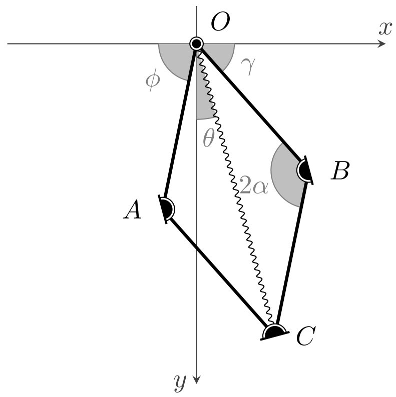
ESAME DI MECCANICA RAZIONALE

CORSO DI ARCHITETTURA E INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

7 Febbraio 2024

Istruzioni. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. È indicato il punteggio associato ad ogni domanda. Il voto minimo per l'accesso all'orale è `15/30`.

In figura è rappresentato un sistema mobile su un piano dove è dato un riferimento cartesiano Oxy. Il sistema è costituito da quattro aste di massa trascurabile e di uguale lunghezza ℓ, imperniate con quattro giunti mobili in modo da formare un rombo di vertici A, B, C e O. I giunti in A, B e C sono tali da permettere alle aste incidenti di avere un angolo reciproco compreso tra l'angolo nullo e l'angolo piatto. Il restante vertice O è fissato nell'origine del riferimento cartesiano, dove un perno permette una rotazione libera senza attrito. Sono inoltre presenti una massa m in A, una massa m in B e una massa m in C. Tutte le masse sono da assumersi puntiformi. Infine, lungo la diagonale $\overline{OC}$ è collocata una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.



A Utilizzando come parametri lagrangiani gli angoli θ e α indicati in figura, scrivere le coordinate dei tre punti A, B e C. Si individuino possibili configurazioni di confine, le forze *attive* agenti sul sistema e il tipo di vincoli a cui esso è soggetto. [`7 pt`]

B Individuare la posizione del centro di massa in funzione dei parametri lagrangiani scelti. Calcolare inoltre il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse perpendicolare al piano e passante per l'origine. [`8 pt`]

C Calcolare le configurazioni di equilibrio *non di confine* del sistema, e dire se esse sono di equilibrio stabile, instabile o indifferente. [`15 pt`]

Suggerimento. Per risolvere l'esercizio, si osservi che, con riferimento alla figura, gli angoli ϕ e γ si possono scrivere in termini di α e θ come

$$\phi = \alpha + \theta \qquad \gamma = \alpha - \theta.$$

SOLUZIONE

A Il sistema ha due gradi di libertà, descritti dai parametri lagrangiani $\theta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, \pi/2]$: le configurazioni aventi $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$ sono di confine. Indicando con $\boldsymbol{g}$ vettore di accelerazione di gravità diretto verso il basso, le forze attive agenti sono la forza peso sulla massa in A, $\boldsymbol{P}_A = m\boldsymbol{g}$, la forza peso sulla massa in B, $\boldsymbol{P}_B = m\boldsymbol{g}$, e la forza peso sulla massa in C, $\boldsymbol{P}_C = m\boldsymbol{g}$. Infine, in C agisce la forza elastica $\boldsymbol{F}_C = k\overrightarrow{CO}$ dove CO ha lunghezza $2\ell \sin\alpha$. L'unico vincolo attivo è il perno in O che è olonomo e ideale e permette la rotazione del sistema. Le coordinate dei punti A, B e C sono

$$\boldsymbol{x}_A = \ell\begin{pmatrix} -\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_B = \ell\begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\theta) \\ \sin(\alpha-\theta) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_C = 2\ell\sin\alpha\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

B La posizione del centro di massa è

$$\boldsymbol{x}_G = \frac{m\boldsymbol{x}_A + m\boldsymbol{x}_B + m\boldsymbol{x}_C}{3m} = \frac{\ell}{3}\begin{pmatrix} \cos(\alpha-\theta)-\cos(\alpha+\theta)+2\sin\alpha\sin\theta \\ \sin(\alpha-\theta)+\sin(\alpha+\theta)+2\sin\alpha\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{4\ell\sin\alpha}{3}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

dove nell'ultimo passaggio si sono usate le formule di addizione $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$ e $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$.

Il momento d'inderzia si trova ora facilmente essendo pari a

$$I = m\|\boldsymbol{x}_A\|^2 + m\|\boldsymbol{x}_B\|^2 + m\|\boldsymbol{x}_C\|^2 = 2m\ell^2(1 + 2\sin^2\alpha).$$

C Osservando che $d^2(C, O) = 4\ell^2\sin^2\alpha$, possiamo scrivere l'energia potenziale come combinazione di un contributo gravitazionale U_g e un contributo elastico U_k. Avendo a disposizione le coordinate del centro di massa, possiamo scrivere

$$U_g = 4m\ell g\cos\theta\sin\alpha, \qquad U_k = -2k\ell^2\sin^2\alpha$$

così che l'energia potenziale globale possa scriversi

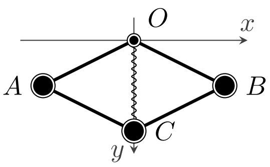
$$U = U_g + U_k = 4m\ell g\cos\theta\sin\alpha - 2k\ell^2\sin^2\alpha.$$

I punti stazionari si ottengono risolvendo la coppia di equazioni

$$\partial_\theta U = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha\sin\theta = 0, \qquad \partial_\alpha U = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha(mg\cos\theta - k\ell\sin\alpha) = 0.$$

Dato che stiamo escludendo le configurazioni di confine, possiamo assumere $\cos\alpha \neq 0$ e $\sin\alpha \neq 0$. Deve essere quindi $\sin\theta = 0$, abbiamo $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Se n è pari, la seconda equazione fornisce $mg - k\ell\sin\alpha = 0$, ovvero, se $\frac{mg}{k\ell} < 1$, $\alpha = \arcsin\frac{mg}{k\ell}$: diversamente non esiste una soluzione *che non sia di confine*. Se n è dispari, si ottiene $-mg - k\ell\sin\alpha = 0$ che non ha soluzione per $\alpha \in (0, \pi/2)$. L'unico possibile punto stazionario è quindi

$$(\alpha, \theta) = \left(\arcsin\frac{mg}{k\ell}, 0\right), \quad \text{se } \frac{mg}{k\ell} < 1. \tag{1}$$



La stabilità può essere studiata valutando la matrice Hessiana in questo punto di equilibrio. La matrice è

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= -4\ell\begin{pmatrix} k\ell(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + mg\sin\alpha\cos\theta & mg\sin\theta\cos\alpha \\ mg\sin\theta\cos\alpha & mg\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix} \\ &= -4\ell\begin{pmatrix} k\ell(1 - 2\sin^2\alpha) + mg\sin\alpha\cos\theta & mg\sin\theta\cos\alpha \\ mg\sin\theta\cos\alpha & mg\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Calcolando sul punto dato dall'Eq. (1), si ha che $\sin\theta = 0$ e $\sin\alpha = \frac{mg}{k\ell}$, per cui

$$\boldsymbol{H} = 4k\ell^2\begin{pmatrix} \frac{m^2g^2}{k^2\ell^2} - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{m^2g^2}{k^2\ell^2} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \frac{mg}{k\ell} < 1.$$

Nell'intervallo di validità della soluzione, $4k\ell^2\left(\frac{m^2g^2}{k^2\ell^2} - 1\right) < 0$, per cui tale punto di equilibrio, quando esiste, è stabile.

Lo studio delle configurazioni di confine non era richiesto ma lo riportiamo per completezza come esempio. Le configurazioni di confine sono associate a $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$. L'analisi può essere svolta utilizzando il principio dei lavori virtuali, ovvero calcolando δU e imponendo che tale variazione virtuale sia sempre negativa. Non avendo θ vincoli di variazione, la prima condizione da imporre è $\partial_\theta U = 0$, ovvero $\sin\alpha \sin\theta = 0$.

Per $\alpha = 0$, $\partial_\theta U|_{\alpha=0} = 0$ sempre; dovendo essere $\delta\alpha > 0$, $\partial_\alpha U|_{\alpha=0} \leq 0$, ovvero $\partial_\alpha U|_{\alpha=0} = 4\ell mg \cos\theta \leq 0$, che è vera se e solo se $\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$: in questo intervallo di angoli θ, $\alpha = 0$ è una configurazione di confine stabile.

Per $\alpha = \pi/2$, la situazione è più delicata. Infatti, $\partial_\theta U|_{\alpha=\pi/2} = -4\ell mg \sin\theta = 0$ è soddisfatto per $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. In $\alpha = \pi/2$, abbiamo che $\partial_\alpha U|_{\alpha=\pi/2} = 0$ identicamente. Questo ci permette di dire che i punti $(\alpha, \theta) = (\pi/2, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, sono di equilibrio. Per capire se essi sono stabili o instabili, però, occorre considerare derivate di ordine superiore. La matrice hessiana è

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 4\ell^2 - 4mg\ell\cos\theta & 0 \\ 0 & -4mg\ell\cos\theta \end{pmatrix}$$

che per $\theta = n\pi$ con n pari ha entrambi autovalori non positivi per $\frac{mg}{kl} \geq 1$, mentre per n dispari ha entrambi autovalori positivi ed è quindi instabile. Di conseguenza $(\alpha, \theta) = (\pi/2, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ pari, è stabile se $\frac{g}{kl} \geq 1$, diversamente è instabile. È possibile eseguire un plot del valore di α associato ad una configurazione stabile al variare del parametro di controllo $\frac{mg}{k\ell}$ per $\theta = 0$.

α stabile per $\theta = 0$