ESAME DI ANALISI MATEMATICA T–2

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

12 Febbraio 2024

ISTRUZIONI. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Ogni quesito corrisponde ad un numero di punti specificato a fine domanda. Il punteggio minimo per accedere alla prova orale è `15/30`.

ESERCIZIO A

Siano date le matrici

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & k^2 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elementi dello spazio vettoriale $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, dipendenti dal parametro reale $k > 0$.

A1 Si calcoli $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_3$. Discutere per quali valori di k la matrice $\boldsymbol{M}$ è diagonalizzabile sul campo dei reali. Specificare se la matrice è invertibile, giustificando la risposta.[`6 pt`]

A2 Determinare per quali valori di k le tre matrici $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ e $\boldsymbol{M}_3$ sono linearmente dipendenti nello spazio vettoriale $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. [`9 pt`]
Suggerimento. L'equazione $x_1\boldsymbol{M}_1 + x_2\boldsymbol{M}_2 + x_3\boldsymbol{M}_3 = \mathbf{0}_{2\times 2}$ corrisponde ad un insieme di *quattro* equazioni lineari.

ESERCIZIO B

Si consideri una superficie elicoidale $\boldsymbol{\sigma}\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^3$, parametrizzata come segue

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}\colon \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u \in [0,1], \quad v \in [0,4\pi]\}$$

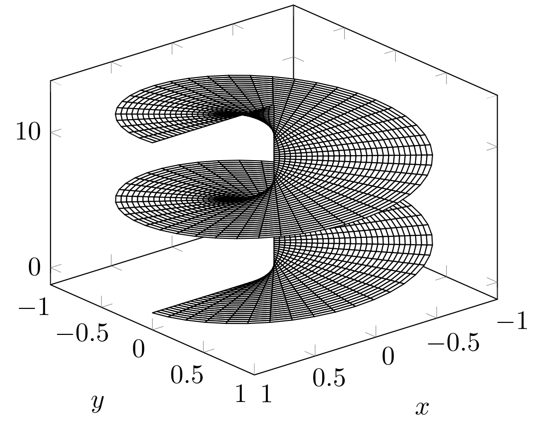
e rappresentata in figura.

B1 Calcolare l'area di $\boldsymbol{\sigma}$. [`8 pt`]
Suggerimento. Per $z > 0$, $\int_0^z \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2+1} + \operatorname{arcsinh}(z)\right)$.

B2 Si consideri la curva giacente sulla superficie a distanza fissa $u \in [0,1]$ dall'asse z

$$\boldsymbol{\gamma}_u(t) \equiv \boldsymbol{\sigma}(u,t), \qquad \boldsymbol{\gamma}_u\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3.$$

Dire se la curva è regolare e se ne calcoli la lunghezza in funzione di u. È possibile fissare una distanza u tale per cui la lunghezza sia 2π? Giustificare la risposta. [`7 pt`]



Esercizio A.

A1 Eseguendo il prodotto si trova che

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} k^2 & k^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolviamo $\det(\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I}_2) = 0$, ovvero

$$\lambda(k^2 - \lambda) = 0.$$

Essendo $k > 0$, allora esistono due autovalori distinti

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = k^2$$

e la matrice $\boldsymbol{M}$ è quindi diagonalizzabile. La matrice tuttavia non è *mai* invertibile, essendo $\det(\boldsymbol{M}) = 0$ per ogni valore di k.

A2 $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ sono linearmente dipendenti se $x_1\boldsymbol{M}_1 + x_2\boldsymbol{M}_2 + x_3\boldsymbol{M}_3 = \boldsymbol{0}_{2\times 2}$ per una terna (x_1, x_2, x_3) di valori non tutti nulli. Ciò significa che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{M}_1 + x_2\boldsymbol{M}_2 + x_3\boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & k^2x_1 + kx_3 \\ kx_1 + x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha soluzioni non triviali, ovvero tali per cui $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$. La relazione sopra corrisponde a *quattro* equazioni lineari, ovvero

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ kx_1 + x_2 = 0, \\ k^2x_1 + x_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Ignorando l'equazione triviale $0 = 0$, possiamo scrivere un sistema di tre equazioni in tre incognite nella forma matriciale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k^2 & 0 & k \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Perché esistano soluzioni non triviali, deve essere $\det(\boldsymbol{A}) = k^2 - k = 0$, ovvero (ricordando che $k > 0$) $k = 1$.

Esercizio B.

B1 Per calcolare l'integrale di superficie calcoliamo

$$\partial_u\boldsymbol{\sigma}(u, v) = \left(\begin{smallmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \partial_v\boldsymbol{\sigma}(u, v) = \left(\begin{smallmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{smallmatrix}\right),$$

e quindi

$$\partial_u\boldsymbol{\sigma}(u, v) \wedge \partial_u\boldsymbol{\sigma}(u, v) = \left(\begin{smallmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \|\partial_u\boldsymbol{\sigma}(u, v) \wedge \partial_u\boldsymbol{\sigma}(u, v)\| = \sqrt{1 + u^2}.$$

La superficie ha quindi area

$$A = \iint_{\mathcal{K}} \|\partial_u\boldsymbol{\sigma}(u, v) \wedge \partial_u\boldsymbol{\sigma}(u, v)\| \,\mathrm{d}\,u \,\mathrm{d}\,v = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \,\mathrm{d}\,u = 2\pi\left(\sqrt{2} + \operatorname{arcsinh}(1)\right).$$

B2 La curva ha parametrizzazione

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\begin{smallmatrix} u\cos t \\ u\sin t \\ t \end{smallmatrix}\right), \quad t \in [0, 4\pi] \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \left(\begin{smallmatrix} -u\sin t \\ u\cos t \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_u(t)\| = \sqrt{1 + u^2} > 0$$

per cui la curva è regolare. La sua lunghezza è

$$\ell(\boldsymbol{\gamma}_u) = \int_0^{4\pi} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}_u(t)\| \,\mathrm{d}\,t = \sqrt{1 + u^2} \int_0^{4\pi} \mathrm{d}\,t = 4\pi\sqrt{1 + u^2}.$$

Per trovare una distanza u tale per cui $\ell(\boldsymbol{\gamma}_u) = 2\pi$, occorre risolvere l'equazione $4\pi = \sqrt{1 + u^2} = 2\pi \Rightarrow u^2 = -3/4$, che non ha soluzione nei reali, per cui la curva suggerita non è costruibile.