ESAME DI ANALISI MATEMATICA T–2

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

31 Gennaio 2024

Istruzioni. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Ogni quesito corrisponde ad un numero di punti specificato a fine domanda. Il punteggio minimo per accedere alla prova orale è `15/30`.

Esercizio A

Si consideri un riferimento cartesiano ortogonale $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ positivamente orientato nel piano. Sia $\mathcal{R}_1$ la retta passante per l'origine O e *ortogonale* al vettore $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2$ con $k \in [0,1]$. Sia inoltre $\mathcal{R}_2$ la retta *di direzione* $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ passante per P, punto individuato dal vettore $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_2$ applicato all'origine.

A1 Scrivere le equazioni cartesiane delle rette $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. [`5 pt`]

A2 Specificare per quali valori di k esiste un punto A di intersezione tra $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Nell'ipotesi quindi che $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \{A\} \neq \varnothing$, trovare il valore di k per cui l'area del triangolo $\widehat{OPA}$ è $1/2$. [`10 pt`]

Esercizio B

Si consideri la seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{x^2+y^2}{2} + k\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2, \quad (x,y)^\intercal \in \mathcal{A} := \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < 1\}$$

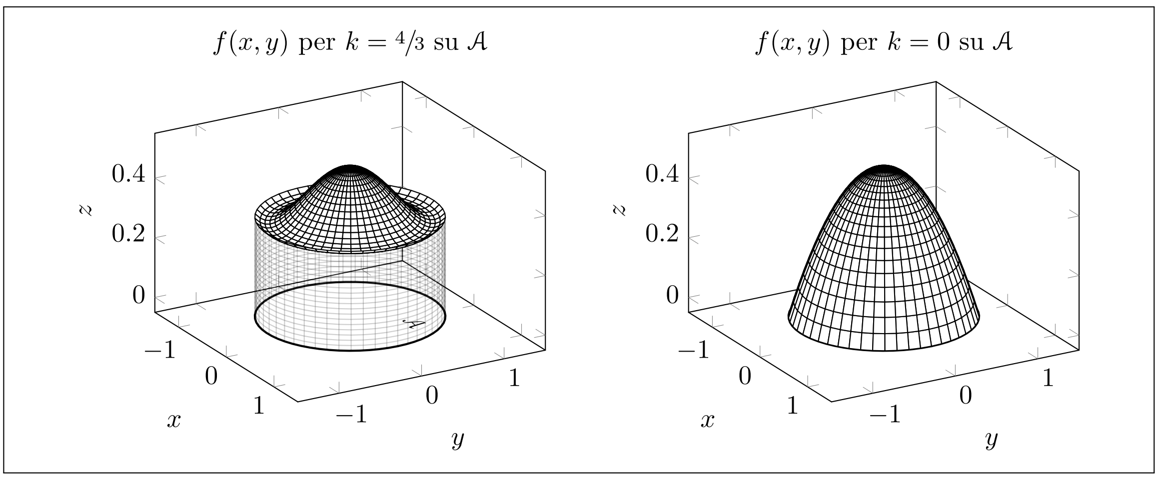
dipendente dal parametro $k \geq 0$ e definita sul disco aperto di raggio 1 centrato nell'origine $\mathcal{A}$.

B1 Trovare i punti stazionari della funzione al variare di k *sul dominio di definizione* $\mathcal{A}$. Selezionare, tra questi, i punti stazionari che giacciono sulla retta $y = 0$: specificare per quali tra essi il metodo dell'hessiano è inconcludente. [`7 pt`]

B2 Si consideri ora il caso particolare $k = 0$. Sia

$$\mathcal{E} = \{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x^2+y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

Si calcoli il rapporto tra l'area della superficie di $\mathcal{E}$ e il suo volume. [`8 pt`]



SOLUZIONE

Esercizio A.

A1 Rappresentiamo il vettore associato al generico punto X del piano col vettore $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$, supposto applicato all'origine. Abbiamo che $\mathcal{R}_1 \colon \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ per cui

$$\mathcal{R}_1 \colon x_1 + kx_2 = 0.$$

Per la retta $\mathcal{R}_2$ invece applichiamo la formula

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} \Rightarrow x_1 + x_2 - 1 = 0,$$

dove abbiamo indicato con p_1 e p_2 la prima e seconda coordinata di $\boldsymbol{p}$ rispetto al riferimento dato.

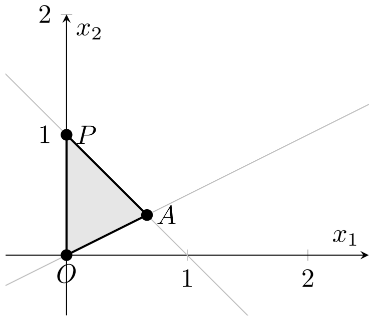
A2 Per trovare le coordinate del punto A dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Questo sistema è compatibile per $k \neq 1$. In tal caso, la soluzione (che si può trovare, per esempio, col metodo di Gauss) fornisce le coordinate $\boldsymbol{a}$ di A ed è pari a

$$\mathbf{a} = \frac{1}{k-1}\begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare l'area A del triangolo, il metodo più semplice[1] è forse considerare, per esempio, $\overline{OP}$ come base (di lunghezza $\|\boldsymbol{p}\| = 1$) e come altezza la distanza tra A e l'asse delle ordinate, pari semplicemente all'ascissa $\frac{k}{k-1}$: l'area è quindi uguale a $A = \frac{\|\boldsymbol{p}\| a_2}{2} = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{k-1}$. Di conseguenza, $A = 1/2$ per $k = 1/2$.



Esercizio B.

B1 Per calcolare i punti stazionari, consideriamo i punti in cui il gradiente della funzione si annulla,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x(-1 + k(x^2 + y^2)) \\ y(-1 + k(x^2 + y^2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo sistema ha una soluzione in $(x, y) = (0, 0)$ che quindi è stazionario. Questo è l'unico punto stazionario se $k = 0$. Sia ora $k \neq 0$. Se assumiamo $x \neq 0$ o $y \neq 0$ otteniamo da entrambe le equazioni

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{k}$$

che descrive una circonferenza in $\mathbb{R}^2$ centrata nell'origine e di raggio $1/\sqrt{k}$. Questa circonferenza è nel dominio $\mathcal{A}$ se e solo se $\frac{1}{k} < 1 \Rightarrow k > 1$. Sulla retta $y = 0$ troviamo quindi tre punti stazionari: $(0, 0)$, $(1/\sqrt{k}, 0)$ e $(-1/\sqrt{k}, 0)$. Per valutare la natura dei punti, calcoliamo l'hessiano

$$H = \begin{pmatrix} -1 + k(3x^2 + y^2) & 2kxy \\ 2kxy & -1 + k(x^2 + 3y^2) \end{pmatrix}$$

nei punti stazionari trovati sopra. Per $(x, y) = (0, 0)$ abbiamo

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] Possiamo anche utilizzare il fatto che questa è uguale al metà della norma del prodotto vettoriale tra i vettori $\hat{\boldsymbol{a}}$ e $\hat{\boldsymbol{p}}$ di coordinate rispettivamente

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{k-1}\begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ripetto ad un riferimento ortonormale positivamente orientato $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, ovvero $A = \frac{1}{2}\|\hat{\boldsymbol{a}} \wedge \hat{\boldsymbol{p}}\|$, che fornisce lo stesso risultato.

che è già in forma diagonale con due autovalori pari a -1, il che mostra che il punto $(0,0)$ è di massimo relativo. Per studiare i punti stazionari $(0, \pm 1/\sqrt{k})$ notiamo che l'hessiano è qui

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui su questi due punti il test è inconcludente, dato che uno degli autovalori è nullo.

B2 Per calcolare l'area della superficie, quest'ultima si può decomporre nel disco di base $\mathcal{A}$, di area $A_b = \pi$, e nella restante superficie parabolica, che può convenientemente essere parametrizzata come

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v)^\intercal \in \mathcal{A}.$$

L'area di questa superficie è

$$A_\sigma = \iint_{\mathcal{A}} \sqrt{1+\|\nabla f(u,v)\|^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \iint_{\mathcal{A}} \sqrt{1+(u^2+v^2)} \mathrm{d}u \mathrm{d}v = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2} \mathrm{d}r = 2\pi \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

La superficie totale è $A \coloneqq A_b + A_\sigma = \frac{4\sqrt{2}+1}{3}\pi$. Il volume, invece è dato da

$$V = \iint_{\mathcal{E}} \frac{1-(x^2+y^2)}{2} \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = 2\pi \int_{\mathcal{E}} \frac{1-r^2}{2} r \,\mathrm{d}\,r = \frac{\pi}{4},$$

dove si è passati di nuovo in coordinate polari. Il rapporto è quindi

$$\frac{A}{V} = \frac{16\sqrt{2}+4}{3}.$$