ESAME DI ANALISI MATEMATICA T–2

CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA – INGEGNERIA
ALMA MATER – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

15 Gennaio 2024

Istruzioni. Il tempo a disposizione per la risoluzione è di 120 minuti. Ogni quesito corrisponde a 5 punti. L'accesso alla prova orale si ottiene con un voto minimo di 15 punti.

Esercizio A

Sia dato il sistema lineare
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
con
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+k & k & 1 \\ k & 2k-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R},$$
e $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ vettore di incognite.

A1 Determinare per quali valori di k il sistema ha un'unica soluzione.

A2 Studiare la dimensione dello spazio delle soluzioni al variare di k. Scrivere l'insieme delle soluzioni del sistema per $k = 0$. Supponendo che la terna $\boldsymbol{x}$ corrisponda alle coordinate di un punto nello spazio tridimensionale rispetto ad un riferimento cartesiano $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, a che tipo di oggetto geometrico corrisponde tale insieme?

A3 Calcolare lo spettro di $\boldsymbol{A}$ per $k = 0$ specificiando se in questo caso la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio B

Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \frac{x^2 - 2kxy + y^2}{2} - x - y, \quad (x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

B1 Trovare, se esistono, i punti stazionari della funzione sul suo insieme di definizione. Individuare per quali valori di k essi sono punti di sella.

B2 Calcolare l'integrale
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \qquad \text{con} \quad \mathcal{R} = [-1,1] \times [-1,1].$$

B3 Si consideri ora $k = -1$ e sia data la curva $\boldsymbol{\gamma}$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata come
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1-t^2 \\ f(t^2, 1-t^2) \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1,1].$$
Dire se la curva è regolare o meno, motivando la risposta. Calcolare la lunghezza della curva $\boldsymbol{\psi}(t) := \boldsymbol{\gamma}(t)$ con $t \in [1/\sqrt{2}, 1]$.

Soluzione

Esercizio A.

A1 La soluzione del sistema è unica se $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, ovvero $k^2 - k \neq 0$, ovvero $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

A2 Per $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione nulla. Rimangono da studiare i casi $k = 0$ e $k = 1$. Per $k = 0$ abbiamo una matrice orlata

$$\boldsymbol{H} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

che mostra che lo spazio delle soluzioni ha dimensione $d = 1$, essendo $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{H}) = 2$. La matrice orlata a gradini trovata corrisponde al sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

ovvero la generica soluzione ha la forma

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Questa è la rappresentazione parametrica di una retta nello spazio nella direzione individuata da $(1, 0, -1)^\intercal$ e passante per $(0, 0, 1)^\intercal$.

Per $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Essendo $\operatorname{rank}(\boldsymbol{H}) \neq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ in questo caso, il sistema è incompatibile per il teorema di Rouché–Capelli.

A3 Per calcolare lo spettro, scriviamo il polinomio caratteristico

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}=(1-(1-\lambda)^2)(1+\lambda)=\lambda(1+\lambda)(2-\lambda)=0$$

per cui lo spettro di A è dato da $\Lambda = \{-1, 0, 2\}$. Avendo trovato un numero di autovalori distinti pari alla dimensione della matrice, essa è diagonalizzabile; diversamente, $\boldsymbol{A}$ è diagonalizzabile in quanto reale simmetrica.

Esercizio B.

B1 Per trovare i punti stazionari, imponiamo $\nabla f = \mathbf{0}$, ovvero

$$x - ky - 1 = 0, \qquad y - kx - 1 = 0.$$

Questo corrisponde al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq \pm 1$ il sistema ha un'unica soluzione: otteniamo

$$x_s = \frac{1}{1-k}, \qquad y_s = \frac{1}{1-k}.$$

Per $k = 1$ non ci sono punti stazionari. Per $k = -1$ la soluzione è la retta $x + y - 1 = 0$: tali punti sono tutti stazionari. Sia ora $k \neq 1$: la matrice hessiana si scrive

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

I punti stazionari sono di sella se i due autovalori di questa matrice hanno segno opposto, ovvero $\det(\boldsymbol{H}) < 0$. Questo implica $1 - k^2 < 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

B2 Si può eseguire l'integrazione direttamente utilizzando il teorema di Fubini,

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \left(\frac{x^2+y^2}{2} - kxy - x - y\right) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y\, x^2 = 2\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^2 = \frac{4}{3},$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato il fatto che gli integrandi sono dispari attorno all'origine, mentre nel terzo abbiamo usato che l'integrale di $x^2/2$ e l'integrale di $y^2/2$ sono uguali.

B3 Osserviamo anzitutto che, nelle ipotesi date

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 - t^2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = 2\sqrt{2}|t|,$$

e quindi la curva non è regolare sul suo dominio di definizione avendo $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(0) = \mathbf{0}$. La curva $\boldsymbol{\psi}$ è invece regolare su $[1/\sqrt{2}, 1]$ e la sua lunghezza è

$$\ell(\boldsymbol{\psi}) = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \,\mathrm{d}\, t = 2\sqrt{2} \int_{1/\sqrt{2}}^{1} t \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$